אלגברה מופשטת 1, תרגיל בית 7

מתרגלים: סולי וישקאוצן ואדם צ'פמן. להגשה ב25.12 או ב28.12 בהתאם לשיעור התרגיל.

1) תהי G חבורה ותהיינה $A,B \lhd G$. תהי A קבוצת כל האיברים מסדר סופי.

a. $G/A \cong G/B$ אם ורק אם $A=B$.

b. $G/A \cong G/B$ אם ורק אם $A \cong B$.

פיתרון:

ניקח $G=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$, $A=\{0\}\times\{0,1\}$ ו $B=\{0,1\}\times\{0\}$, ואז מתקיים $G/A\cong G/B$ אע"פ ש$A\neq B$. [הפרכה לסעיף 1]

ניקח $G=\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_2$, $A=\{(0,0),(2,0)\}$ ו $B=\{(0,0),(0,1)\}$, ואז מתקיים $A\cong B$ אע"פ ש$G/A\ncong G/B$. [הפרכה לסעיף 2]

2) נביט בחבורה S_6 ובתת-קבוצה $A=\{\sigma\in S_6:\sigma(4)=4\}$.

a. הראו שזו תת-חבורה.

b. האם היא נורמלית?

c. מה הסדר שלה?

פיתרון:

A כוללת את תמורת הזהות id משום ש$id(4)=4$, וזה איבר היחידה של S_6.

תהיינה שתי תמורות $\sigma,\tau\in A$. 4 ולכן $\sigma\circ\tau(4)=\sigma(\tau(4))=\sigma(4)=4$

$\sigma\circ\tau\in A$, משמע A סגורה לפעולת החבורה (הרכבה). מכיוון שכל תמורה היא מסדר סופי אין צורך להראות כי A כוללת גם את ההפכיים של איבריה. לסיכום מקבלים שA היא תת-חבורה של S_6.

ניקח את התמורה $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\in A$. ניקח את התמורה $\tau=\begin{pmatrix}1 & 4\end{pmatrix}\in S_6$. כעת, $\tau^{-1}\circ\sigma\circ\tau=\begin{pmatrix}2 & 4\end{pmatrix}\notin A$, משמע A איננה נורמלית.

מספר האיברים בA שווה למספר התמורות על חמשת האיברים $\{1,2,3,5,6\}$, דהיינו $5!$.

3) תהי G חבורה מסדר סופי ו $H \lhd G$ כך ש $\gcd(|H|,[G:H])=1$. הוכח כי H היא התת-חבורה היחידה של G מסדר $|H|$.

פיתרון:

נניח בשלילה כי קיימת עוד תת-חבורה $K \le G$ שונה מ H המקיימת $|K|=|H|$.

בגלל ש $H \lhd G$, KH הינה גם תת-חבורה של G, ובפרט $H \lhd HK$. [צריך להוסיף פה הסבר]

כמובן שגם $K \cap H$ הינה תת-חבורה של H של K ושל G.

כעת, $[G:H]=[G:KH]\cdot[KH:H]$.

מכיוון ש $H \lhd HK$, לפי משפט האיזומורפיזם השני,

$KH/H \cong (KH \cap K)/(H \cap K) = K/(H \cap K)$ ובפרט

$[KH:H]=[K:K \cap H]$. אולם $|K|=|H|$ ולכן

$[K:K \cap H]=\frac{|K|}{|K \cap H|}=\frac{|H|}{|K \cap H|}=[H:K \cap H]$, וקיבלנו

ש$[KH:H]=[H:K \cap H]$. כעת, מצד אחד $[H:K \cap H]$ מחלק את $|H|$

ומצד שני $[KH:H]$ מחלק את $[G:H]$, ולכן $[H:K \cap H]$ מחלק את

$\gcd(|H|,[G:H])$.

אולם, $H \ne K$ ולכן $[H:K \cap H]>1$, וזו סתירה לנתון

$\gcd(|H|,[G:H])=1$.

4) תהי $Aut(\mathbb{Z}_n)$ קבוצת כל האיזומורפיזמים $f:\mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$. הוכח כי $Aut(\mathbb{Z}_n) \cong U_n$.

פיתרון:

מכיוון ש $\mathbb{Z}_n =< 1 >$, כל הומומורפיזם $h:\mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ נקבע לפי התמונה של 1.

כעת, אם $\gcd(h(1),n) = d > 1$ אזי $h(\frac{n}{d}) = \frac{n}{d}h(1) = n\frac{h(1)}{d} = 0$ ולכן h לא

חח"ע (משום ש $h(0) = 0$ ו $\frac{n}{d} \neq 0$ ב $\mathbb{Z}_n$). מאידך, אם $\gcd(h(1),n) = 1$ אזי

$\mathbb{Z}_n =< h(1) >$ ולכן h היא על ובגלל עקרון שובך היונים היא גם חח"ע ולכן

איזומורפיזם.

לסיכום, אם נסמן h_k את ההומומורפיזם המקיים $h_k(1) = k$ אז

$Aut(\mathbb{Z}_n) = \{h_k : \gcd(k,n) = 1\}$.

מאידך, $U_n = \{k : \gcd(k,n) = 1\}$.

נגדיר פונקציה $f: U_n \to Aut(\mathbb{Z}_n)$ המקיימת $f(k) = h_k$.

[זה ברור כי היא מוגדרת היטב]

נראה כי פונקציה זו היא הומומורפיזם:

$f(ab) = h_{ab}$. נותר להראות כי $h_{ab} = h_a \circ h_b$. לשם כך מספיק להראות כי

$h_{ab}(1) = h_a \circ h_b(1)$.

$h_{ab}(1) = ab$ מצד אחד. מצד שני

$h_a \circ h_b(1) = h_a(h_b(1)) = h_a(b) = bh_a(1) = ba$ [אין משמעות לסדר הכפל

משום שבתוך $\mathbb{Z}_n$ הכפל היא פעולה אבלית].

כמובן ש f היא על, ולכן לפי עקרון שובך היונים היא גם חח"ע ולכן

איזומורפיזם.

5) מצאו את כל חבורות המנה של S_3.

פיתרון:

כל תת-חבורה של S_3 היא מגודל 1, 2, 3 או 6. תת-החבורה היחידה מגודל 1 היא $\{id\}$ והיחידה מגודל 6 היא S_3 עצמה. שתיהן כמובן נורמליות, והמנות בשתיהן הן חבורות מנה, ואלה הן S_3 ו $\{id\}$.

תת-חבורה מגודל 2 היא תת-חבורה הנוצרת ע"י חילוף, $H = \langle (i \quad j) \rangle$. תת-חבורה כזאת איננה נורמלית, משום שאם לוקחים חילוף $\tau = (i \quad k)$ (עבור $k \neq j$) אז מקבלים ש $\tau (i \quad j) \tau^{-1} = (k \quad j) \notin H$.

תת-חבורה מגודל 3 היא תת-חבורה הנוצרת ע"י מחזור מאורך שלוש. ישנם אמנם שני מחזורים מאורך שלוש, אך שניהם יוצרים את אותה תת-החבורה, לכן תת-החבורה היחידה מגודל 3 היא $H = \{id, (1 \quad 2 \quad 3), (1 \quad 3 \quad 2)\}$. מכיוון שהאינדקס שלה הוא 2, היא תת-חבורה נורמלית.

המנה היא $S_3 / H = \{H, H \circ (1 \quad 2)\} \cong \mathbb{Z}_2$.