

שאלה 2

יהי $n < 1$ מספר טבעי. נניח שהפונקציה f מוגדרת וגזירה n פעמים בסביבת הנקודה 0 , ומתקיים $f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$ אך $f^{(n)}(0) = 5$. חשב את הגבול

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{(\sin 2x)^n}$$

בפתרון, מותר להשתמש בגבול הידוע $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$.

תשובה:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{(\sin(2x))^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{(\sin(2x))^n} \cdot \frac{\sin(2x)^n}{2^n x^n} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2^n x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2^n} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} = \frac{5}{2^n n!}$$

נכנסים n פעמים.

שאלה 3

נגדיר, לכל נקודה x בקטע $[-1, 1]$,

$$f(x) := \int_{-1}^x |t| dt$$

א. בטא את הפונקציה $f(x)$ בצורה מפורשת (בלי סימן האינטגרל).

ב. מצא את הנקודות בהן הפונקציה f רציפה.

ג. מצא את הנקודות בהן הפונקציה f גזירה.

תשובה:

$$f(x) = \begin{cases} \int_{-1}^0 -t dt + \int_0^x t dt & 0 < x \leq 1 \\ \int_{-1}^x -t dt = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} & -1 \leq x \leq 0 \end{cases} \quad \text{א)}$$

$$= +\frac{t^2}{2} \Big|_{-1}^0 + \frac{t^2}{2} \Big|_0^x = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2}$$

7) f רציפה בלב $[-1, 1]$ ופי המשפט היסודי, מטיון שבאינטגרל (א)

רציף. רק גמ נמוג מסעיף א)

8) לפי המשפט היסודי - סבא \bar{c} סגור באינטגרל רציף נקן f גזירה

כט הפסע (אוסקין) $(f'(x) = |x|)$

שאלה 4

לכל אחד מהאינטגרלים הבאים, בדוק האם הוא מתכנס, והאם הוא מתכנס בהחלט.

א. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(\log x)^2} dx$

ב. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

ג. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3}{\sqrt{1+x^5}} dx$

תשובה:

$I = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x} dx$

(כ)

$g(x) = \sin x$

$f(x) = \frac{1}{x}$ כעולה שצריך ריבוי, וכמו יורה נכ

חסונה $G(x) = \int_1^x \sin t dt = \cos 1 - \cos x$

נמצא כי I מתכנס.

$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = \int_{-\infty}^{\ln \frac{1}{2}} \frac{1}{u^2} du$

שגשג, $u < 1$

(כ)

העם-טענה

$\ln x = u$

$\frac{dx}{x} = du$

נמצא כי המספר הרישומי... (כ)

(כ)

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

$f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1+x^5}}$

נכון f, g חתכים.

$g(x) = \frac{1}{x}$

כאן $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ מתכנס, וכן $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} dx$ מתכנס.

