תרגיל 8

1. אם (X,τ) מ"ט B_2 אזי $|\tau| \le 2^{\aleph_0}$

פתרון:

נתון שקיים בסיס $\{O_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. מספר הקבוצות שניתן "לייצר" בעזרת איחודים מקבוצה זאת, חסום ע"י מספר תתי הקבוצות של $\mathbb{N}$ ששווה ל $2^{\aleph_0}$.

2. אם (X,τ) מ"ט ו B_τ בסיס ל τ. אזי כל $B_\tau \subseteq B' \subseteq \tau$ היא בסיס גם כן.

פתרון:

תהא B' כנ"ל ותהא O פתוחה. אזי קיימות $O_i \in B_\tau$ כך ש $O = \cup_{i\in I} O_i$. ואלו בפרט גם קבוצות ב B'.

3. יהא (X,τ) מ"ט ו B_τ בסיס ל τ. תהא C המקיימת: כל קבוצה ב B_τ היא איחוד של קבוצות מ C. הוכיחו כי C בסיס ל τ

פתרון:

תהא O פתוחה. אזי קיימות $O_i \in B_\tau$ כך ש $O = \cup_{i\in I} O_i$. לכל i קיימות $U_{i,j} \in C$ כך ש $O_i = \cup_{j\in J_i} U_{i,j}$ ואז נקבל כי $O = \cup_{i\in I} \cup_{j\in J_i} U_{i,j}$ איחוד של קבוצות מ C. כלומר C בסיס.

4. יהא X קבוצה ו τ, τ' טופולוגיות ו $B_\tau, B_{\tau'}$ בסיסים להם, בהתאמה.

(א) הוכיחו כי אם $B_\tau \subseteq B_{\tau'}$ אזי $\tau \subseteq \tau'$

פתרון:

תהא $O \in \tau$ אזי קיימות $O_i \in B_\tau$ כך ש $O = \cup_{i\in I} O_i$. בפרט $O_i \in B_{\tau'}$ ולכן $O = \cup_{i\in I} O_i \in \tau'$.

(ב) הפריכו את הכיוון השני. כלומר , אם $\tau \subseteq \tau'$ אזי לא בהכרח $B_\tau \subseteq B_{\tau'}$.

פתרון:

נקח $X = \mathbb{R}$ ונגדיר $\tau = \tau'$ להיות הטופולוגיה הרגילה. $B_\tau = \{B(x,r) : x \in \mathbb{R}, 0 < r \in \mathbb{R}\}$ בסיס לטופולוגיה שאינה מוכלת בבסיס $B_{\tau'} = \tau' = \tau$.

5. תהא $f : (X,\tau) \to (Y,\tau')$ רציפה ופתוחה. הוכיחו/הפריכו: אם X הוא B_2 אזי גם $f(X)$ הוא B_2.

פתרון:

הוכחה: בה"כ f על. נתון שקיים בסיס $\{O_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ ל X. כעת, תהא V פתוחה ב Y. אזי $f^{-1}(V)$ פתוחה ב X ולכן $f^{-1}(V) = \cup_{j\in J} O_{i_j}$. כיוון ש f על נקבל כי $V = f(\cup_{j\in J} O_{i_j}) = \cup_{j\in J} f(O_{i_j})$. ומכאן ש $\{f(O_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ בסיס בן מנייה ל Y.

6. יהא $X = \mathbb{R} \cup \{p\}$ (עבור $p \notin \mathbb{R}$) ו $\tau = \{O : p \notin O \vee |O^c| \le \aleph_0\}$. הוכיחו כי (X,τ) אינו ספרבילי ואינו B_2.

פתרון:

לפי הגדרת τ קבוצה A בת מניה היא סגורה כי המשלים שלה פתוח (כי המשלים שלה המשלים הוא A שהיא בת מניה..) . לכן, כל קבוצה בת מנייה A מקיימת $\bar{A} = A$ בפרט לא קיימת קבוצה בת מנייה A כך ש $\bar{A} = \mathbb{R}$.

7. בתרגיל זה נוכיח שת"מ של ספרבילי אינו בהכרח ספרבילי. נגדיר $X = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_2 \right\}$ (חצי מישור העליון) . נגדיר

$$B_1 = \{B(x,r) : x \in X, 0 < r \in \mathbb{R}\} \cap X$$

$$B_2 = \left\{ B(x, x_2) \cup \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} : x \in X, 0 < x_2 \right\}$$

כאשר $B(x,r)$ הוא הכדור "הרגיל" ב $\mathbb{R}^2$. במילים אחרות B_1 הוא חיתוך של הכדורים $B(x,r)$ ב $\mathbb{R}^2$. ו B_2 הוא כל הכדורים הפתוחים שהסגור שלהם משיק ל "ציר ה x" איחוד נקודת ההשקה.
נגדיר τ להיות הטופולוגיה ש $B_1 \cup B_2$ הוא הבסיס שלה.

(א) הוכיחו כי (X, τ) ספרבילי.
פתרון:
נגדיר $A = \mathbb{Q}^2 \cap X$ בת מניה. והיא צפופה כי היא נחתכת עם כל קבוצה פתוחה בסיסית. ולכן X ספרבילי.

(ב) נגדיר ת"מ $Y = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} : x_1 \in \mathbb{R} \right\}$. הוכיחו כי Y אינו ספרבילי.
פתרון:
לכל x_1 ממשי מתקיים כי $\left[B(x, x_2) \cup \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right] \cap Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ולכן לכל x_1 ממשי $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ פתוח. כלומר Y הוא מרחב דיסקרטי שלא בן מניה ולכן לא ספרבילי.