תרגיל 2 - אנליזה הרמונית

7 בינואר 2019

1. יהי $C[-1,1]$ מרחב הפונקציות הרציפות $f:[-1,1]\to\mathbb{C}$ עם המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1}f(x)\overline{g(x)}\mathbf{d}x$.
   (א) הראו שהקבוצה $p_0(x)=1$, $p_1(x)=x$, $p_2(x)=1-3x^2$. הוכיחו שהקבוצה היא אורתוגונלית ב $C[-1,1]$.
   (ב) מצאו קבועים $a,b,c,$ כך שהפונקציה $p_3(x)=a+bx+cx^2+x^3$ תהיה אורתוגולית לכל אחת מן הפונקציות בסעיף א'.

פתרון:

(א) נבדוק שהתנאים מתקיימים:

$$\langle 1,x\rangle=\int_{-1}^{1}x\mathbf{d}x=0$$
$$\left\langle 1,1-3x^2\right\rangle=\int_{-1}^{1}1-3x^2\mathbf{d}x=x-3x^3\Big|_{-1}^{1}=0$$
$$\left\langle x,1-3x^2\right\rangle=\int_{-1}^{1}x-3x^3\mathbf{d}x=0 .$$

השוויון האחרון מיידי כי $x-3x^3$ היא פונקציה זוגית על קטע סימטרי.

(ב) על מנת להקל על החישוב נשים לב שאם $a+bx+cx^2+x^3$ אורתוגונלי ל $\left\{1,x,1-3x^2\right\}$ אזי הוא אורתוגונלי גם ל $\left\{1,x,x^2\right\}$ כי הם פורשים את אותה המרחב. האילוץ

$$\left\langle 1,a+bx+cx^2+x^3\right\rangle=\left\langle x,a+bx+cx^2+x^3\right\rangle=\left\langle x^2,a+bx+cx^2+x^3\right\rangle=0$$

מתפרש למערכת משוואות:

$$\begin{aligned}\left\langle 1.a+bx+cx^2+x^3\right\rangle &= \int_{-1}^{1} a+bx+cx^2+x^3\mathbf{d}x\\ &= 2a+\frac{2}{3}c=0\\ \left\langle x,a+bx+cx^2+x^3\right\rangle &= \int_{-1}^{1} ax+bx^2+cx^3+x^4\\ &= \frac{2}{3}b+\frac{2}{5}\\ \left\langle x^2,a+bx+cx^2+x^3\right\rangle &= \int_{-1}^{1} ax^2+bx^3+cx^4+x^5\\ &= \frac{2}{3}a+\frac{2}{5}c=0\end{aligned}$$

נפתור את המערכת משוואות

$$\begin{aligned}2a+\frac{2}{3}c=0\\ \frac{2}{3}a+\frac{2}{5}c=0\\ \frac{2}{3}b+\frac{2}{5}=0\end{aligned}$$

נפתור ונקבל $a=c=0$, $b=-\frac{3}{5}$ והפולינום המבוקש הוא $x^3-\frac{3}{5}x$.

2. יהי W תת־מרחב של $C\left[-1,1\right]$, הנפרש על ידי $\{1,\cos\pi x,\sin\pi x\}$. מצאו את ההיטל של $f\left(x\right)=\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|$ ב־W.

פתרון: נשים לב שהמערכת היא אורתוגונלית. כמו כן, נשים לב ש

$$\begin{aligned}\left\langle \sin\pi x,\sin\pi x\right\rangle = \left\langle \cos\pi x,\cos\pi x\right\rangle = 1\\ \left\langle 1,1\right\rangle = 2\end{aligned}$$

נשתמש בנוסחא עבור היטל:

$$proj_{span\{1,\cos\pi x,\sin\pi x\}}(\sin\frac{\pi x}{2})=\frac{\left\langle sin\frac{\pi x}{2},1\right\rangle}{\left\langle 1,1\right\rangle}1+\frac{\left\langle sin\frac{\pi x}{2},\cos\pi x\right\rangle}{\left\langle \cos\pi x,\cos\pi x\right\rangle}\cos\pi x+\frac{\left\langle \sin\frac{\pi x}{2},\sin\pi x\right\rangle}{\left\langle \sin\pi x,\sin\pi x\right\rangle}\sin\pi x$$

נשים לב שבגלל ש $\sin\frac{\pi x}{2}$ אי זוגית נקבל

$$\begin{aligned}\left\langle \sin\frac{\pi x}{2},1\right\rangle &= \int_{-1}^{1}\sin\frac{\pi x}{2}\mathbf{d}x=0\\ \left\langle \sin\frac{\pi x}{2},\cos\pi x\right\rangle &= \int_{-1}^{1}\sin\frac{\pi x}{2}\cos\pi x\mathbf{d}x=0\\ \left\langle \sin\frac{\pi x}{2},\sin\pi x\right\rangle &= \int_{-1}^{1}\sin\frac{\pi x}{2}\sin\pi x\mathbf{d}x=\\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\cos\frac{\pi x}{2}-\cos\frac{3\pi x}{2}\right)\mathbf{d}x\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2}-\frac{2}{3\pi}\sin\frac{3\pi x}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{1}\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi}+\frac{4}{3\pi}\right)=\frac{8}{3\pi}\end{aligned}$$

ההיטל הינו

$$.proj_{span\{1,\cos\pi x,\sin\pi x\}}(\sin\frac{\pi x}{2})\frac{8}{3\pi}\sin(\pi x)$$

3. יהי P_2 מרחב הפולינומים הממשיים ממעלה קטננה או שווה ל 2. לכל $f,g\in P_2$ נגדיר

$$.\ \langle f,g\rangle=\int_0^\infty f(x)\,g(x)\,e^{-x}\mathbf{d}x$$

(א) הוכח שזוהי מכפלה פנימית על P_2.

(ב) הראו שהקבוצה $\left\{1,1-x,1-2x+\frac{1}{2}x^2\right\}$ היא מערכת אורתונורמלית ביחס למכפלה פנימית זו.

פתרון:

(א) נראה שכל התכונות מתקיימות. תחילה ־ קל לראות שהפונקציה אי שלילית ועבור פולינום f שמקיים

$$\langle f,f\rangle=\int_0^\infty f^2(x)\,e^{-x}\mathbf{d}x=0$$

בהכרח $f=0$. כמו כן, קל לראות שהתבנית היא לינארית ברכיב הראשון וסימטרית.

(ב) נחשב את

$$.I_n=\int_0^\infty x^n e^{-x}\mathbf{d}x=-x^n e^{-x}\Big|_0^\infty+\int_0^\infty nx^{n-1}e^{-x}\mathbf{d}x=nI_{n-1}$$

כמו כן, קל לראות ש

$$I_0=\int_0^\infty e^{-x}\mathbf{d}x=1$$

ולכן $I_n = n!$. מכאן נבדוק אורטוגונורמליות.

$$\langle 1,1\rangle = I_0 = 0$$
$$\langle 1,1-x\rangle = I_0 - I_1 = 0$$
$$\left\langle 1,1-2x+\frac{1}{2}x^2\right\rangle = I_0 - 2I_1 + \frac{1}{2}I_2 = 0$$
$$\langle 1-x,1-x\rangle = I_0 - 2I_1 + I_2 = 1$$
$$\left\langle 1-x,1-2x+\frac{1}{2}x^2\right\rangle = I_0 - 2I_1 + \frac{1}{2}I_2 - I_1 + 2I_2 - \frac{2}{2}I_3 = I_0 - 3I_1 + \frac{5}{2}I_2 - \frac{1}{2}I_3 = 0$$
$$.\left\langle 1-2x+\frac{1}{2}x^2,1-2x+\frac{1}{2}x^2\right\rangle = I_0 - 4I_1 + 5I_2 - 2I_3 + \frac{1}{4}I_4 = 1-4+10-12+6 = 1$$