קריטריון קושי

<u>הגדרה:</u> נאמר שסדרה $\{a_n\}$ מקיימת את קריטריון קושי אם: $\forall \epsilon>0 \exists N\in\mathbb{N} \forall n,m\geq N: |a_n-a_m|<\epsilon$, ונקרא ל- $\{a_n\}$ "סדרת קושי".

<u>תרגיל:</u> כל סדרה מתכנסת היא סדרת קושי.
<u>הוכחה:</u> תהי $\{a_n\}$ מתכנסת, ונסמן גבולה ב- L . נראה שהיא מקיימת את קריטריון קושי. יהי $\epsilon>0$. לפי התכנסות $\{a_n\}$ יש $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\geq N$ מתקיים: $|a_n-L|<\frac{\epsilon}{2}$. כלומר לכל $n,m\geq N$ מתקיים:
$|a_n-a_m|\leq|a_n-L|+|a_m-L|\leq\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$, כדרוש.

<u>תרגיל:</u> כל סדרת קושי היא סדרה חסומה.
<u>פתרון:</u> תהי $\{a_n\}$ סדרת קושי, כלומר $\forall \epsilon>0 \exists N\in\mathbb{N} \forall n,m\geq N: |a_n-a_m|<\epsilon$. נציב $\epsilon=1, m=N$, ונקבל: $\exists N\in\mathbb{N} \forall n\geq N: |a_n-a_N|<1$ כלומר $-1<a_n-a_N<1$ כלומר $a_N-1<a_n<1-a_N$ כלומר $\{a_n\}_{n=N}^{\infty}$ חסומה.
לכן ברור כי גם $\{a_n\}$ חסומה כי הוספנו מספר סופי של איברים (פורמלית: נסמן $C_1=min(a_1,a_2,\dots,a_{N-1},a_N-1)$, $C_2=max(a_1,a_2,\dots,a_{N-1},1-a_N)$, ואז אכן $C_1\leq a_n\leq C_2$ לכן n טבעי).

<u>תרגיל:</u> סדרה של מספרים ממשיים היא מתכנסת אם ורק אם היא סדרת קושי.
<u>פתרון:</u> לפי תרגיל לעיל נשאר להראות רק כי כל סדרת קושי היא סדרה מתכנסת.
תהי $\{a_n\}$ סדרת קושי. לפי תרגיל לעיל היא חסומה, לכן לפי משפט בולצנו-ווירשטרס יש לה תת-סדרה מתכנסת. נסמנה $\{a_{n_k}\}\to L$. נראה כי גם $\{a_n\}\to L$. יהי $\epsilon>0$. $\{a_n\}$ סדרת קושי לכן יש N_1 כך שלכל $n,m\geq N_1$ מתקיים $|a_n-a_m|<\frac{\epsilon}{2}$. כמו כן $\{a_{n_k}\}$ סדרה מתכנסת לכן יש N_2 כך שלכל $n_k\geq N_2$ מתקיים $|a_{n_k}-L|<\frac{\epsilon}{2}$. לכן לכל $n\geq N=max(N_1,N_2)$ יהי $a_{n_{k'}}\in\{a_{n_k}\}$ כך ש- $n_{k'}\geq N$, נקבל לפי א"ש המשולש:

$$|a_n-L|\leq|a_n-a_{n_{k'}}|+|a_{n_{k'}}-L|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$$

<u>תרגיל:</u> הראו כי הסדרה הבאה מתכנסת: $a_n=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{n^2}$.
<u>פתרון:</u> נראה כי זו סדרת קושי. יהיו $n>m$ אזי:

$$a_n-a_m=\frac{1}{(m+1)^2}+\frac{1}{(m+2)^2}+\dots+\frac{1}{n^2}<$$
$$\frac{1}{m(m+1)}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}+\dots+\frac{1}{(n-1)n}=$$
$$(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1})+(\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2})+\dots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})=\frac{1}{m}-\frac{1}{n}<\frac{1}{m}$$

כלומר יהי $\epsilon>0$, נבחר $N=[\frac{1}{\epsilon}]$ ואז עבור $n,m\geq N$ מתקיים: $|a_n-a_m|<\frac{1}{m}<\epsilon$, כדרוש.

תרגילים נוספים אם יש זמן

<u>תרגיל:</u> תהי a_n סדרה המקיימת $\lim((a_n)^2)=1$. מה ניתן לאמר על הגבולות החלקיים שלה?

<u>פתרון:</u> הגיונית, ריבועי איברי הסדרה קרובים לבסוף ל-1, לכן האיברים עצמם קרובים כל אחד ל-1 או ל- -1 , לכן הגבולות החלקיים האפשריים הם רק $1,-1$. נוכיח זאת: תהי a_{n_k} תת-סדרה המתכנסת ל- L . לפי אריתמטיקה של גבולות $a_{n_k}^2$ מתכנסת ל- L^2 . מצד שני $a_{n_k}^2$ מתכנסת ל-1 כי a_n^2 סדרה מתכנסת המתכנסת ל-1 (לכן כל תת-סדרה שלה מתכנסת גם היא לאותו הגבול). לסדרה גבול יחיד לכן $L^2=1$ כלומר $L=\pm1$, כדרוש.

המספר e

משפט: $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n=e^x$.

תרגיל: חשבו את הגבול: $\lim_{n\to\infty}(\frac{n+3}{n+7})^n$.

פתרון:

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{n+3}{n+7})^n=\lim_{n\to\infty}(\frac{n+7-4}{n+7})^n=\lim_{n\to\infty}(\frac{n+7}{n+7}-\frac{4}{n+7})^n=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{4}{n+7})^n=\lim_{n\to\infty}((1+\frac{-4}{n+7})^{n+7})^{\frac{n}{n+7}}=(e^{-4})^1=e^{-4}$$

לחלופין:

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{n+3}{n+7})^n=\lim_{n\to\infty}(\frac{\frac{n}{n}+\frac{3}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{7}{n}})^n=\lim_{n\to\infty}(\frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{7}{n}})^n=\frac{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{3}{n})^n}{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{7}{n})^n}=\frac{e^3}{e^7}=e^{-4}.$$

תרגיל: חשבו את הגבול: $\lim_{n\to\infty}(\frac{n^2-5}{n^2-4})^n$.

פתרון:

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{n^2-5}{n^2-4})^{3n^2+5}=\lim_{n\to\infty}(\frac{n^2-4-1}{n^2-4})^{3n^2+5}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{-1}{n^2-4})^{3n^2+5}=\lim_{n\to\infty}((1+\frac{-1}{n^2-4})^{n^2-4})^{\frac{3n^2+5}{n^2-4}}=(e^{-1})^3=e^{-3}$$

תרגיל: חשבו את הגבול: $\lim_{n\to\infty}(\frac{n+2}{n+1})^{-n}$

פתרון: $\lim_{n\to\infty}(\frac{n+2}{n+1})^{-n}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^{-n}=\lim_{n\to\infty}((1+\frac{1}{n+1})^{n+1})^{-n}=e^{-1}$

תרגיל: חשבו את הגבול: $\lim_{n\to\infty}(\frac{n+5}{n^2+1})^n$.

פתרון: 0 (סדרה השואפת ל-0 בחזקת סדרה השואפת לאינסוף)

טורים

הגדרה: בהתכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ הכוונה להתכנסות סדרת הסכומים החלקיים $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$.

משפט: אם $\lim a_n\neq0$ אז הטור $\sum a_n$ מתבדר.

שימו לב: אם $\lim a_n=0$ זה לאו דווקא אומר שהטור המתאים מתבדר, למשל $a_n=\frac{1}{n}$.

תרגיל: קבעו האם הטור $\sum \frac{n+1}{2n}$ מתכנס או מתבדר.

פתרון: $a_n=\frac{n+1}{2n}\to\frac{1}{2}$ לכן הטור מתבדר.

תרגיל: קבעו אם הטור $\sum (-1)^n[\frac{n+1}{n}]$ מתכנס או מתבדר (באשר הסוגריים המרובעים זה ערך שלם).

פתרון: לכל $n\geq 2$ מתקיים $[\frac{n+1}{n}]=1$ לכן $a_n=-2,1,-1,1,-1,\ldots$ כלומר a_n לא שואפת ל- 0 , לכן הטור מתבדר.

תרגיל: קבעו האם הטור $\sum \ln(\frac{n+1}{n})$ מתכנס או מתבדר.

פתרון: $a_n=\ln(\frac{n+1}{n})\to 0$ לכן לא ניתן להחליט דבר לפי המשפט לעיל. אך זהו טור טלסקופי: יהי S_n הסכום החלקי ה- n -י, אז מתקיים:

$$S_n=\ln(\frac{2}{1})+\ln(\frac{3}{2})+\ldots+\ln(\frac{n+1}{n})=\ln 2-\ln 1+\ln 3-\ln 2+\ldots+\ln(n+1)-\ln(n)=\ln(n+1)-\ln(1)=\ln(n+1)$$

כלומר $\lim S_n=\lim \ln(n+1)=\infty$ כלומר הטור מתבדר.

תרגיל: הוכיחו כי הטור הבא מתכנס ומצאו את סכומו: $\sum \frac{1}{(n+2)(n+4)}$.

פתרון: $a_n=\frac{1}{(n+2)(n+4)}=\frac{(n+4)-(n+2)}{(n+2)(n+4)}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+4})$ לכן:

$S_n=\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{5}-\ldots-\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+4})$ הכל מתבטל חוץ מהאיבר הראשון והשלישי בהתחלה, והראשון והשלישי מהסוף, כלומר:

$S_n=\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4})$ לכן $\lim S_n=\frac{1}{2}(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})$.

תרגיל: קבעו האם הטור $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ מתכנס או מתבדר.

פתרון: האיבר הכללי שואף ל-0 לכן לא ניתן להחליט דבר לפי המשפט לעיל. נחשב את $\lim S_n$ לפי "סנדוויץ' באינסוף":

$S_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\geq n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}\to\infty$ לכן הטור מתבדר.

תרגיל: הוכיחו כי הטור הבא מתכנס ומיצאו את סכומו: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$.

פתרון:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

כלומר זהו טור טלסקופי ורק האיבר הראשון והאחרון נשארים:

$$Sn=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\rightarrow 1$$

כלומר $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}=1$.

משפט: הטור ההנדסי $\sum_{n=0}^{\infty}q^n$ מתבדר עבור $|q|\geq 1$, ומתכנס עבור $|q|<1$ וסכומו $\frac{1}{1-q}$.

תרגיל: הוכיחו כי הטור הבא מתכנס ומיצאו את סכומו: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{3^{n-1}}$

פתרון: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{3^{n-1}}=10\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}=10\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=10\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}=10\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=15$

תרגיל: הוכיחו כי הטור הבא מתכנס ומיצאו את סכומו: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n}$

פתרון:

מתקיים: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{6^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{6^n}$

חשוב מאוד לעצור ולהבהיר שהפירוק הזה לגיטימי אך ורק בגלל שאנחנו יודעים שהטורים בצד ימין מתכנסים (כי הם טורים הנדסיים) – באופן כללי לא ניתן לבצע פירוקים כאלו אם הטורים אליהם פירקנו לא מתכנסים. נמשיך:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{6^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{6^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n-1+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n-1=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}-1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-1=\frac{3}{2}.$$

תרגיל: הוכיחו כי הטור הבא מתכנס ומיצאו את סכומו: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+n^2+n}{2^{n+1}n(n+1)}$

פתרון:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+n^2+n}{2^{n+1}n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(n+1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}.$$

שוב, חשוב לעצור ולהבהיר כי הפירוק הזה יהיה נכון רק אם אכן נראה כי כל אחד מהטורים בצד ימין מתכנס. אחרת, אין לו משמעות.

נטפל קודם בראשון, הוא טלסקופי:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(n+1)}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

כלומר $S_n=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots-\frac{1}{n+1})\rightarrow\frac{1}{2}$

כעת נטפל בשני:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{4}(\frac{1}{1-\frac{1}{2}})=\frac{1}{2}$$

כלומר אכן הטורים שניהם מתכנסים לכן הפירוק הראשוני היה לגיטימי לכן: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+n^2+n}{2^{n+1}n(n+1)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.

<u>תרגיל:</u> הראו כי הטור הבא מתכנס $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log((1+\frac{1}{n})^n(1+n))}{\log(n^n)\log((n+1)^{n+1})}$ וכי סכומו הוא $\frac{1}{2\log 2}$.

<u>פתרון:</u>

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n(1+n)}{(\log(n^n))(\log(n+1)^{n+1})} &= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+\log(1+n)}{n\log n\cdot(n+1)\log(n+1)}\\ &= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n\log(n+1)-n\log n+\log(n+1)}{n\log n\cdot(n+1)\log(n+1)}\\ &= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n+1)\log(n+1)-n\log n}{n\log n\cdot(n+1)\log(n+1)}\\ &= \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n\log n}-\frac{1}{(n+1)\log(n+1)}\right)\end{aligned}$$

כלומר זהו טור טלסקופי:

$$S_n=\frac{1}{2\log 2}-\frac{1}{3\log 3}+\frac{1}{3\log 3}-\frac{1}{4\log 4}+\ldots+\frac{1}{n\log n}-\frac{1}{(n+1)\log(n+1)}=\frac{1}{2\log 2}-\frac{1}{(n+1)\log(n+1)}\rightarrow\frac{1}{2\log 2}$$

כלומר סכום הטור הוא: $\frac{1}{2\log 2}$.