תרגול 11 אינפי 3

20 בינואר 2015

משפט הפונקציה ההפוכה:

תהי $A \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה ותהי f פונקציה המוגדרת על הקבוצה, גזירה ברציפות.

תהי $a \in A$ עבורה $J_f(a) \neq 0$.

אזי, קיימת סביבה U של a ($U \subset A$) כך שהקבוצה $f(U)$ גם פתוחה.

בנוסף, f מעתיקה את U חח"ע על V ו-$f^{-1} : V \to U$ גם גזירה ברציפות, ומתקיים:

$$D_{f^{-1}}(f(x)) = (D_f(x))^{-1}$$

לכל $x \in U$ כאשר $D_f(x)$ היא מטריצת יעקובי.

במילים אחרות, אם f גזירה ברציפות והיעקוביאן לא מתאפס אז f הפיכה מקומית.

<u>תרגיל:</u>

תהי:

$$f(x,y,z) = (e^x \sin z, e^y \cos z, e^z xy)$$

הוכיחו כי f הפיכה מקומית בנקודה $(0,1,0)$, ומצאו את מטריצת יעקובי של f^{-1} בנקודה $(0,e,0)$.

<u>פתרון:</u>

נחשב את מטריצת היעקובי של f:

$$\begin{pmatrix} e^x \sin z & 0 & e^x \cos z \\ 0 & e^y \cos z & -e^y \sin z \\ e^z y & e^z x & e^z xy \end{pmatrix}$$

ובנקודה $(0,1,0)$ שלנו נקבל:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & e & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

זו מטריצה הפיכה ולכן הדטרמיננטה שלה שונה מ-0.

כלומר, $J_f(0,1,0) \neq 0$ ולכן לפי משפט הפונקציה ההפוכה, נקבל ש$-f$ הפיכה מקומית בסביבת $(0,1,0)$.

כעת, מטריצת היעקובי של f^{-1} היא ההופכית של מטריצת היעקובי של f, כלומר:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & e & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>תרגיל:</u>

נגדיר פונקציה:

$$f(x,y) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

הוכיחו כי f אינה חח"ע בכל קטע פתוח המכיל את 0.

הדרכה: הוכיחו כי לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$f\left(\frac{2}{(4k+1)\pi}\right) > f\left(\frac{2}{(4k+3)\pi}\right)$$

$$f\left(\frac{2}{(4k+4)\pi}\right) > f\left(\frac{2}{(4k+3)\pi}\right)$$

איזה תנאי של משפט הפונקציה ההפוכה אינו מתקיים?

<u>פתרון:</u>

נוכיח את אי־השיוויון שבהדרכה:

$$f\left(\frac{2}{(4k+1)\pi}\right) = \frac{2}{(4k+1)\pi} + 2\left(\frac{2}{(4k+1)\pi}\right)^2 sin(2k\pi + \frac{\pi}{2}) = \frac{2}{(4k+1)\pi} + 2\left(\frac{2}{(4k+1)\pi}\right)^2$$

$$f\left(\frac{2}{(4k+3)\pi}\right) = \frac{2}{(4k+3)\pi} + 2\left(\frac{2}{(4k+3)\pi}\right)^2 sin(2k\pi + \frac{3\pi}{2}) = \frac{2}{(4k+3)\pi} - 2\left(\frac{2}{(4k+3)\pi}\right)^2$$

ומכיוון שמתקיים:

$$\frac{2}{(4k+3)\pi} < \frac{2}{(4k+1)\pi}$$

$$-2\left(\frac{2}{(4k+3)\pi}\right)^2 < 2\left(\frac{2}{(4k+1)\pi}\right)^2$$

נקבל שאכן:

$$f\left(\frac{2}{(4k+3)\pi}\right) < f\left(\frac{2}{(4k+1)\pi}\right)$$

כמו כן:

$$f\left(\frac{2}{(4k+4)\pi}\right) = \frac{2}{(4k+4)\pi} + 2\left(\frac{2}{(4k+4)\pi}\right)^2 sin(2k\pi + \frac{4\pi}{2}) = \frac{2}{(4k+4)\pi}$$

כלומר נותר להוכיח ש:

$$\frac{2}{(4k+4)\pi} > \frac{2}{(4k+3)\pi} - 2\left(\frac{2}{(4k+3)\pi}\right)^2$$

עם קצת אריתמטיקה נקבל:

$$16k + 16 > \pi(4k+3)$$

וזה אכן מתקיים, והוכחנו את אי־השיוויון.

מה נותן לנו אי־השיוויון?

בכל קטע פתוח מסביב ל-0 נקבל שהפונקציה שלנו אינה מונוטונית, כי:

$$\frac{2}{(4k+1)\pi} > \frac{2}{(4k+3)\pi} > \frac{2}{(4k+4)\pi}$$

אך:

$$f\left(\frac{2}{(4k+1)\pi}\right) > f\left(\frac{2}{(4k+3)\pi}\right) < f\left(\frac{2}{(4k+4)\pi}\right)$$

ואנו יודעים שפונקציה רציפה וחח"ע היא מונוטונית (חשבו למה), ולכן הפונקציה שלנו אינה חח"ע.

התנאי שאינו מתקיים הוא גזירות ברציפות.

אם נחשב את הנגזרת של f נקבל:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 4x\sin\frac{1}{x} - 2\cos\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

והגבול:

$$\underset{x\to 0}{lim}\left(1+4x\sin\frac{1}{x}-2\cos\frac{1}{x}\right)$$

לא קיים, ולכן הנגזרת אינה רציפה.

קיצון עם אילוץ:

אנו רוצים למצוא נקודת קיצון של פונקציה $f=f(x_1,\ldots,x_n)$ כאשר יש לנו אילוצים:

$$g_i(x_1,\ldots,x_n)=0$$

כאשר $1\leq i\leq m$.

אילוץ פירושו תנאי מסויים שהנקודה צריכה לקיים.

כדי לחשב למצוא קיצון שכזה, נגדיר פונקציה חדשה:

$$L=L(x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_m)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i+f$$

פונקציה זו נקראת הלגרנז'יאן. נחפש את הקיצון של הלגרנז'יאן בשיטות שאנו מכירים (השוואת גרדיאנט ל-0 וכו').

הקיצון שנמצא הוא הקיצון שלנו תחת האילוצים הנתונים.

<u>תרגיל:</u>

דוגמה קלה מויקיפדיה.

יש לנו פחית גלילית עם נפח V, ואנו רוצים למצוא את שטח הפנים המינימלי האפשרי לפחית כזאת.

<u>פתרון:</u>

לחישוב שטח פנים A אנו צריכים 2 משתנים - גובה הגליל ורדיוסו (מחוגו, בעברית צחה).

כלומר, נחקור את הפונקציה:

$$A(r,h)=2\pi r^2+2\pi rh$$

עם האילוץ:

$$V-\pi r^2h=0$$

הלגרנז'יאן שלנו היא:

$$L(r,h,\lambda)=2\pi r^2+2\pi rh+\lambda\left(V-\pi r^2h\right)$$

נשווה את הגרדיאנט ל-0 ונקבל:

$$L_r=4\pi r+2\pi h-2\lambda\pi hr=0$$

$$L_h=2\pi r-\lambda\pi r^2$$

$$L_\lambda=V-\pi r^2h=0$$

ואם נפתור את המשוואות נקבל:

$$h=\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}},r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

נציב בפונקציה A ונקבל את שטח הפנים המינימלי.

<u>תרגיל:</u>

מצאו את נקודות הקיצון הגלובאליות של הפונקציה $f(x,y)=x+y$ בתחום:

$$D=\{(x,y)|xy\geq 4,x+2y\leq 9,x\geq 0,y\geq 0\}$$

<u>פתרון:</u>

בדומה לשאלה על המשולש מתרגול קודם.

קודם כל, נחפש נקודות חשודות בתוך התחום. נשווה את הגרדיאנט ל-0 ונקבל:

$$(1,1)=(0,0)$$

וזה כמובן לא אפשרי. לכן אין נקודות חשודות בפנים התחום (וקל וחומר שאין שם קיצון).

נחפש נקודות חשודות על השפה.

ראשית, במקרים $x=0$ ו-0 $y=$ הנקודות אינן בתחום, כי נדרש $xy\geq 4$.

אם $x+2y=9$ אז $x+y=9-y$, כלומר נחפש נקודות קיצון של:

$$9-y$$

וזהו קו ישר, והקיצון שלו תתקבלנה בקצוותיו. כלומר, כאשר $x+2y=9$ וגם $xy=4$.
נפתור את שתי המשוואות האלו, ונקבל: $y=4, y=\frac{1}{2}$.
לכן, הנקודות החשודות הן: $(1,4), (8,\frac{1}{2})$.
נותר לחפש נקודות חשודות על $xy=4$. כלומר:

$$y=\frac{4}{x}$$

נגזור, נשווה ל־0 ונקבל:

$$1-\frac{4}{x^2}=0$$

ולכן: $x=\pm 2$.
נזכור כי $x \geq 0$ ולכן רק $x=2$ מתאים ולכן הנקודה החשודה היא $(2,2)$.
כעת נבדוק מהו הערך של f בכל אחת מהנקודות החשודות:

$$f(2,2)=4$$

$$f(8,\frac{1}{2})=8\frac{1}{2}$$

$$f(1,4)=5$$

ולכן $(2,2)$ היא נקודת מינימום גלובאלי בתחום D, ו־$(8,\frac{1}{2})$ היא נקודת מקסימום גלובאלי בתחום D.
שימו לב שלא השתמשנו בכופלי לגרנז'.

<u>תרגיל:</u>
מצאו את המרחק המינימלי בין הנקודה $(0,0)$ להיפרבולה:

$$7x^2+8xy+y^2=45$$

<u>פתרון:</u>
הפונקציה שלנו צריכה לתאר מרחק, קרי: $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.
עם זאת, אפשר למצוא קיצון לפונקציה $f(x,y)=x^2+y^2$, מכיוון שאם נמצא נקודה שבה ריבוע המרחק הוא מינימלי, גם המרחק יהיה מינימלי.

האילוץ שלנו הוא:

$$g(x,y) = 7x^2 + 8xy + y^2 - 45$$

ולכן הלגרנז'יאן תהיה:

$$L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(7x^2 + 8xy + y^2 - 45)$$

נשווה את הגרדיאנט ל-0 ונקבל:

$$L_x = 2x + 14\lambda x + 8\lambda y = 0$$

$$L_y = 2y + 2\lambda y + 8\lambda x = 0$$

$$L_\lambda = 7x^2 + 8xy + y^2 - 45 = 0$$

נפתור את המשוואות ונקבל:

$$\lambda = 1$$

ואת הנקודות $(2,1),(-2,-1)$.
נציב אותן בפונקציה ונקבל:

$$f(2,1) = f(-2,-1) = 5$$

נזכור שזהו ריבוע המרחק, ולכן המרחק הוא $\sqrt{5}$.