דף תרגילים 8

תרגיל 1

א. תהי $\alpha(t) = (\pi, 2t)$ עבור $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. מיצאו את אורך העקומה α.

ב. תהי

$$x(\theta, \phi) = (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi)$$

פרמטריזציה של ספירת היחידה. מיצאו את אורך העקומה $\beta = x \circ \alpha$.

פתרון 1

א. זהו קו ישר מ־ $(\pi, 0)$ ל־ (π, π) כלומר אורכו π. לחלופין $\alpha'(t) = (0, 2)$, כלומר $|\alpha'(t)| = 2$, כלומר $L(\alpha) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2dt = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$.

ב. ראינו כי

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \sin^2\phi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

לכן

$$(g_{ij})(\alpha(t)) = \begin{pmatrix} \sin^2(2t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

לכן

$$L(\beta) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{g_{ij}(\alpha(t))\frac{d\alpha^i}{dt}\frac{d\alpha^j}{dt}}dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{g_{11}\left(\frac{d\alpha^1}{dt}\right)^2 + 2g_{12}\frac{d\alpha^1}{dt}\frac{d\alpha^2}{dt} + g_{22}\left(\frac{d\alpha^2}{dt}\right)^2}dt$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2(2t)\cdot 0^2 + 0 + 1\cdot 2^2}dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2dt = \pi$$

תרגיל 2 נתונה עקומה מישורית $\alpha(t) = (t,t)$ עבור $0 \leq t \leq 2\pi$. נתון משטח $x(u^1,u^2)$ בעל מטריקה

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2e^{2u^1} & 0 \\ 0 & 2e^{2u^2} \end{pmatrix}$$

חשבו את אורך $\beta = x \circ \alpha$.

פתרון 2

$$(g_{ij})(\alpha(t)) = \begin{pmatrix} 2e^{2t} & 0 \\ 0 & 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\alpha'(t) = (1,1) = \left(\frac{d\alpha^1}{dt}, \frac{d\alpha^2}{dt}\right)$$

לכן

$$L(\beta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{g_{ij}(\alpha(t))\frac{d\alpha^i}{dt}\frac{d\alpha^j}{dt}}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{g_{11}\left(\frac{d\alpha^1}{dt}\right)^2 + 2g_{12}\frac{d\alpha^1}{dt}\frac{d\alpha^2}{dt} + g_{22}\left(\frac{d\alpha^2}{dt}\right)^2}dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2e^{2t}\cdot 1^2 + 0 + 2e^{2t}\cdot 1^2}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4e^{2t}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2e^t dt = 2(e^{\frac{\pi}{2}} - 1)$$

תרגיל 3 עבור השאלות מדף תרגילים 7 (של שבוע שעבר), זהו את המטריקות השקולות קונפורמית למטריקה שטוחה סטנדרטית, ועבורן חשבו את סמלי גמא ע"י הנוסחאות עבור מטריקה כזו. וודאו כי קיבלתם את אותה תוצאה כמו בחישוב הישיר מדף תרגילים 7.

פתרון 3 מדף תרגילים 7 שאלה 5 היא היחידה הרלוונטית. הגורם הקונפורמי הוא $\lambda = \frac{81}{x^2}$. מתקיים

$$\lambda_1 = -162x^{-3} \qquad \lambda_2 = 0$$

לכן

$$\Gamma^1_{11} = \frac{\lambda_1}{2\lambda} = -x^{-1}$$
$$\Gamma^1_{22} = -\Gamma^1_{11} = x^{-1}$$
$$\Gamma^1_{12} = \frac{\lambda_2}{2\lambda} = 0$$

תרגיל 4

א. מיצאו פרמטריזציה של גליל עם רדיוס a כמשטח סיבוב של עקומה במישור xz.

ב. מיצאו את סמלי גמא.

ג. מיצאו את המשוואות הגיאודזיות.

ד. מיצאו את העקומות הגיאודזיות.

פתרון 4

א. נקח את הקו הישר במישור xz המוגדר ע"י $r(\phi) = a, z(\phi) = \phi$ ונקבל את המשטח המבוקש ע"י סיבוב סביר ציר z:

$$x(\theta, \phi) = (a\cos\theta, a\sin\theta, \phi)$$

ב.

$$g_{11} = \langle x_\theta, x_\theta \rangle = a^2$$
$$g_{12} = \langle x_\theta, x_\phi \rangle = 0$$
$$g_{22} = \langle x_\phi, x_\phi \rangle = 1$$

כל מקדמי המטריקה קבועים כלומר $g_{ij;k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = 0$ לכל i, j, k.

לכן $\Gamma^k_{ij} = 0$ לכל i, j, k.

ג. המשוואות הגאודזיות הן

$$\left(\alpha^i\right)' \left(\alpha^j\right)' \Gamma^k_{ij} + \left(\alpha^k\right)'' = 0 \qquad k = 1, 2$$

אצלנו $\Gamma^k_{ij} = 0$ לכל i, j, k לכן המשוואות הן

$$\begin{cases} (\alpha^1)'' = 0 \\ (\alpha^2)'' = 0 \end{cases}$$

ד. ע"י אינטגרציה נקבל

$$\begin{cases} \alpha^1 = C_1 + C_2 s \\ \alpha^2 = C_3 + C_4 s \end{cases}$$

כלומר

$$\alpha(s) = (\alpha^1(s), \alpha^2(s)) = (C_1 + C_2 s, C_3 + C_4 s)$$

תרגיל 5 עבור הספירה $x^2+y^2+z^2=a^2$ מיצאו פרמטריזציה כמשטח סיבוב של עקומה במישור xz, ומיצאו את המשוואות הגיאודזיות.

פתרון 5 כפי שכבר ראינו

$$x(\theta,\phi)=(a\sin\phi\cos\theta, a\sin\phi\sin\theta, a\cos\phi)$$

זה משטח סיבוב עם $r^2(\phi)=a^2\sin^2\phi$ ו־ $\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2+\left(\frac{dz}{d\phi}\right)^2=a^2$ כלומר

$$(g_{ij})=\begin{pmatrix}a^2\sin^2\phi & \\ & a^2\end{pmatrix} \qquad (g^{ij})=\begin{pmatrix}a^{-2}\sin^{-2}\phi & \\ & a^{-2}\end{pmatrix}$$

$$(g_{ij;1})=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \qquad (g_{ij;2})=\begin{pmatrix}a^2\sin 2\phi & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

רק $g_{11;2}$ שונה מ־0.

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1&=\frac{1}{2}(g_{11;1}-g_{11;1}+g_{11;1})g^{11}=0\\
\Gamma_{11}^2&=\frac{1}{2}(g_{12;1}-g_{11;2}+g_{12;1})g^{22}=\frac{1}{2}\left(-a^2\sin 2\phi\right)a^{-2}=-\sin\phi\cos\phi\\
\Gamma_{12}^1&=\frac{1}{2}(g_{11;2}-g_{12;1}+g_{21;1})g^{11}=\frac{1}{2}\left(a^2\sin 2\phi\right)a^{-2}sin^{-2}\phi=\cot\phi\\
\Gamma_{12}^2&=\frac{1}{2}(g_{12;2}-g_{12;2}+g_{22;1})g^{22}=0\\
\Gamma_{22}^1&=\frac{1}{2}(g_{21;2}-g_{22;1}+g_{21;2})g^{11}=0\\
\Gamma_{22}^2&=\frac{1}{2}(g_{22;2}-g_{22;2}+g_{22;2})g^{22}=0
\end{aligned}$$

המשוואות הגאודזיות הן

$$\begin{cases}\alpha^{i\prime}\alpha^{j\prime}\Gamma_{ij}^1\alpha^{1\prime\prime}=0\\ \alpha^{i\prime}\alpha^{j\prime}\Gamma_{ij}^2\alpha^{2\prime\prime}=0\end{cases}$$

אצלנו

$$\Gamma_{11}^2=-\sin\phi\cos\phi \qquad \Gamma_{12}^1=\cot\phi$$

לכן במשוואה הראשונה רק $\Gamma_{12}^1\neq 0$ כלומר היא

$$2\alpha^{1\prime}\alpha^{2\prime}\cot\phi+\alpha^{1\prime\prime}=0$$

כלומר

$$2\cot(\phi)\theta'\phi' + \theta'' = 0$$

במשוואה השניה רק $\Gamma_{11}^{2} \neq 0$ כלומר היא

$$\left(\alpha^{1'}\right)^{2}(-\sin\phi\cos\phi) + \alpha^{2''} = 0$$

כלומר

$$-\sin\phi\cos\phi\left(\theta'\right)^{2} + \phi'' = 0$$

סה"כ

$$\begin{cases} 2\cot(\phi)\theta'\phi' + \theta'' = 0 \\ -\sin\phi\cos\phi\left(\theta'\right)^{2} + \phi'' = 0 \end{cases}$$