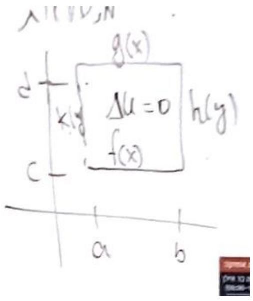
תרגול 14

משוואת לפלס במלבן



$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

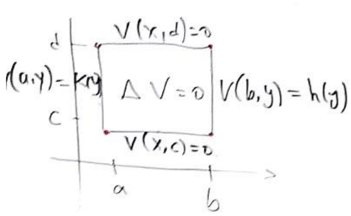
$$u(x,c) = f(x)$$

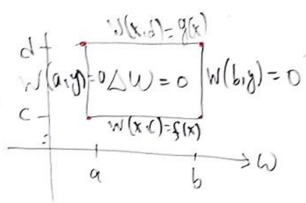
$$u(x,d) = g(x)$$

$$u(a,y) = k(y)$$

$$u(b,y) = h(y)$$

במצב שאין שני תנאים מאותו הסוג (לפי x או לפי y) שהם הומוגניים, לא ניתן לעשות הפרדת משתנים מיד. נציג $u = v + w$, כך ש – v ו – w הרמוניות ולכן u עצמה תהיה הרמונית כסכום של שתי פונקציות הרמוניות:





$$\begin{cases} v_{xx} + v_{yy} = 0, & a < x < b, c < y < d \\ v(x,c) = 0, & a \le x \le b \\ v(x,d) = 0, & a \le x \le b \\ v(a,y) = k(y), & c \le y \le d \\ v(b,y) = h(y), & c \le y \le d \end{cases}, \quad \begin{cases} w_{xx} + w_{yy} = 0, & a < x < b, c < y < d \\ w(x,c) = f(x), & a \le x \le b \\ w(x,d) = g(x), & a \le x \le b \\ w(a,y) = 0, & c \le y \le d \\ w(b,y) = 0, & c \le y \le d \end{cases}$$

תנאי תואמות:

$$\begin{cases} v(a,c) = 0 \\ v(a,c) = k(c) \end{cases} \Rightarrow k(c) = 0$$

$$\begin{cases} v(b,c) = 0 \\ v(b,c) = h(c) \end{cases} \Rightarrow h(c) = 0$$

$$\begin{cases} v(a,d) = 0 \\ v(a,d) = k(d) \end{cases} \Rightarrow k(d) = 0$$

$$\begin{cases} v(a,c) = 0 \\ v(a,c) = h(d) \end{cases} \Rightarrow h(d) = 0$$

לכן:

$$k(c) = h(c) = k(d) = h(d) = 0$$

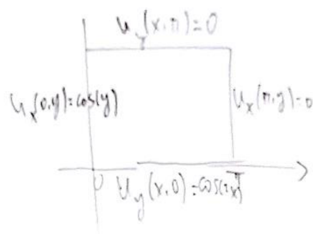
באופן דומה במלבן השני.

תרגיל:

פתרו את המד"ח:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x, y < \pi \\ u_x(0, y) = \cos(y), & 0 \le y \le \pi \\ u_x(\pi, y) = 0, & 0 \le y \le \pi \\ u_y(x, 0) = \cos(2x), & 0 \le x \le \pi \\ u_y(x, \pi) = 0, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

פתרון:



נפצל את u לפי $u = v + w$ ולכן נקבל 2 מערכות:

$$\begin{cases} v_{xx} + v_{yy} = 0, & 0 < x, y < \pi \\ v_x(0, y) = \cos(y), & 0 \le y \le \pi \\ v_x(\pi, y) = 0, & 0 \le y \le \pi \\ v_y(x, 0) = 0, & 0 \le x \le \pi \\ v_y(x, \pi) = 0, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_{xx} + w_{yy} = 0, & 0 < x, y < \pi \\ w_x(0, y) = 0, & 0 \le y \le \pi \\ w_x(\pi, y) = 0, & 0 \le y \le \pi \\ w_y(x, 0) = \cos(2x), & 0 \le x \le \pi \\ w_y(x, \pi) = 0, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

נפתור את הבעיה על v:

$$v(x, y) = \underbrace{X(x)}_{\neq 0} \underbrace{Y(y)}_{\neq 0}$$

$$v_y(x, y) = X(x)Y'(y)$$

תנאי שפה:

$$0 = v_y(x, 0) = X(x)Y'(0) \Rightarrow \boxed{Y'(0) = 0}$$

$$0 = v_y(x,\pi) = X(x)Y'(\pi) \Rightarrow \boxed{Y'(\pi) = 0}$$

נציב במד"ח:

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

$$\begin{cases} -\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda \\ Y'(0) = Y'(\pi) = 0 \end{cases}$$

קיבלנו:

$$\begin{cases} Y''(y) + \lambda Y(y) = 0 \\ Y'(0) = Y'(\pi) = 0 \end{cases}$$

נחלק ל – 3 מקרים:

<u>$\lambda = 0$:</u>

$$Y''(y) = 0$$

$$Y(y) = ay + b$$

נציב תנאי שפה:

$$\begin{cases} Y'(0) = a = 0 \\ Y'(\pi) = a = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = 0}$$

לכן:

$$\boxed{Y(y) = b}$$

<u>$\lambda < 0$:</u>

מקרה טריוויאלי (בדוק זאת!).

<u>$\lambda > 0$:</u>

$$Y''(y) + \lambda Y(y) = 0$$

$$k^2 + \lambda = 0 \Rightarrow k^2 = -\lambda \Rightarrow k = \pm i\sqrt{\lambda}$$

לכן:

$$Y(y) = c_1 \cos\left(\sqrt{\lambda}y\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\lambda}y\right)$$

נציב תנאי שפה:

$$Y'(y) = -\sqrt{\lambda}c_1 \sin\left(\sqrt{\lambda}y\right) + \sqrt{\lambda}c_2 \cos\left(\sqrt{\lambda}y\right)$$

$$0 = Y'(0) = c_2\sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow \boxed{c_2 = 0}$$

$$0 = Y'(\pi) = -\underbrace{\underbrace{c_1}_{\neq 0}}_{\text{מניחים}}\underbrace{\sqrt{\lambda}}_{\neq 0}\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) = 0$$

$$\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) = 0$$

$$\sqrt{\lambda}\pi = n\pi$$

$$\boxed{\lambda_n = n^2}$$

אלו הע"ע. נקבל את הפ"ע:

$$\boxed{Y_n(y) = c_n\cos(ny)}$$

נכניס למקרה הזה גם את המקרה ש - $\lambda = 0$ ונקבל:

$$Y_n(y) = c_n\cos(ny), \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

נחזור למשוואה עבור X:

$$-\frac{X_n''(x)}{X_n(x)} = -n^2$$

$$X_n''(x) - n^2X_n(x) = 0$$

$$\Rightarrow k^2 - n^2 = 0$$

$$k = \pm n$$

תוצאה ממשית, ולכן:

$$X_n(x) = a_ne^{nx} + b_ne^{-nx}$$

לכן:

$$v_n(x,y) = c_n\cos(ny)\left[a_ne^{nx} + b_ne^{-nx}\right] = \cos(ny)\left[A_ne^{nx} + B_ne^{-nx}\right]$$

לכן:

$$v(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\cos(ny)\left[A_ne^{nx} + B_ne^{-nx}\right]$$

נרצה להציב את תנאי ההתחלה שלנו:

$$v_x(\pi,y) = 0$$

$$v_x(0,y) = \cos(y)$$

לכן:

$$\cos(y) = v_y(0,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\cos(ny)\left[nA_n - nB_n\right]$$

$$0=v_y(\pi,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\cos(ny)\left[nA_ne^{n\pi}-nB_ne^{-n\pi}\right]$$

נקבל מהשוואת מקדמים:

$$\begin{cases} n=1: A_1-B_1=1 \\ \forall n\neq 1: nA_n-nB_n=0 \end{cases}$$

$$\forall n: nA_ne^{n\pi}-nB_ne^{-n\pi}=0$$

$$n=1: \begin{cases} A_1-B_1=1 \\ A_1e^{\pi}-B_1e^{-\pi}=0 \end{cases}$$

$$n\neq 1, n\neq 0: \begin{cases} nA_1-nB_1=0 \\ nA_ne^{n\pi}-nB_ne^{-n\pi}=0 \end{cases}$$

נחלק ב – n:

$$\begin{cases} A_1-B_1=0 \\ A_ne^{n\pi}-B_ne^{-n\pi}=0 \end{cases}$$

נסתכל על הדטרמיננטה:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ e^{n\pi} & -e^{-n\pi} \end{vmatrix}=e^{-n\pi}+e^{n\pi}=2\sinh(n\pi)\neq 0$$

ולכן $n\neq 0,1$ פתרון טריוויאלי $A_n=B_n=0$.

עבור $n=1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ e^{\pi} & -e^{-\pi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ e^{\pi} & -e^{-\pi} \end{vmatrix}=-e^{-\pi}+e^{\pi}=2\sinh(\pi)$$

כלל קרמר:

$$A_1=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -e^{-\pi} \end{vmatrix}}{\Delta}=-\frac{e^{-\pi}}{2\sinh(\pi)}$$

$$B_1=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ e^{\pi} & 0 \end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{e^{\pi}}{2\sinh(\pi)}$$

לכן:

$$v(x,y)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\cos(ny)\left[A_ne^{nx}+B_ne^{-nx}\right]$$

$$\boxed{v(x,y)=c_0+\cos(y)\left[-\frac{e^{-\pi}e^{-xx}}{2\sinh(\pi)}-\frac{e^{\pi}e^{x}}{2\sinh(\pi)}\right]}$$

באופן דומה נמצא גם את w.

■

מסקנה:

עבור בעיית דריכלה בתחום D חסום וסגור –

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \qquad (x,y) \in D \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}|_{(x,y)\in\partial D} = f(x) \end{cases}$$

נקבל שלאופרטור לפלס עם תנאי שפה נוימן יש יחידות עד כדי קבוע.

שטורם ליוביל

נתונה המשוואה:

$$(1)\ a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + (a_2(x) + \lambda)y(x) = 0$$

כאשר $a < x < b$. אחרי שנכפיל את משוואה (1) בגורם:

$$\mu(x) = \frac{1}{a_0(x)} + e^{\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}$$

נקבל את בעיית ליוביל (עבור $a < x < b$):

$$\begin{cases} (2)\ \dfrac{d}{dx}\big(p(x)\cdot y(x)\big) + \big(q(x) + \lambda r(x)\big)y(x) = 0 \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases}$$

כאשר λ הוא פרמטר המהווה ע"ע של אופרטור הדיפרנציאלי מעל מרחב הפו'. האופרטור הדיפרנציאלי מוגדר ע"י תנאי שפה וכל פתרון של (2) הוא פו' עצמית.

משפט: נניח ש - $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ע"ע ו - $y_1 \neq y_2$ הן פ"ע לע"ע בהתאמה, אזי y_1 ו - y_2 אורתוגונליים בקטע $[a,b]$ ביחס לפו' המשקל $r(x)$.

תרגיל:

$$\begin{cases} r\dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{d\phi}{dr}\cdot r\right) + \lambda\phi(r) = 0, \qquad 1 < r < b \\ \phi(1) = \phi(b) = 0, \qquad b > 1 \end{cases}$$

א) האם היא בצורת שטרום ליוביל? במידה ולא, הבא לצורת שטרום ליוביל.

ב) מה הע"ע והפ"ע לבעיית שטרום ליוביל?

ג) הראה שעבור $\lambda_1 \neq \lambda_2$, y_2, y_1 אורתוגונליות ביחס לפו' המשקל.

פתרון:

נזכור כי בקואורדינטות כדוריות:

$$\Delta u = \underbrace{u_{rr} + \frac{1}{r}u_r}_{\substack{\Delta r \\ \text{לפלסיאן רדיאלי}}} + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$$

לכן:

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0$$

<u>הערה:</u>

$$\Delta_r = r\left[\frac{d^2\phi}{dr^2}r + 1\cdot\frac{d\phi}{dr}\right]$$

$$\Delta_r = r^2\frac{d^2\phi}{dr^2} + r\cdot\frac{d\phi}{dr}$$

א) המשוואה שלנו:

$$r^2\frac{d^2\phi}{dr^2} + r\cdot\frac{d\phi}{dr} + \lambda\phi(r) = 0$$

אז אפשר להשתמש בגורם אינטגרציה כאשר $a_0(r) = r^2, a_1(r) = r, a_2(r) = 0$ ואפשר מיד לחלק ב – r:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{d\phi}{dr}r\right) + \frac{\lambda}{r}\phi(r) = 0$$

ואכן קיבלנו משוואה בצורה של שטרום ליוביל. במקרה שלנו:

$$p(r) = r$$

$$q(r) = 0$$

$$r(r) = \frac{1}{r}$$

ב) נכתוב את המשוואה שלנו:

$$\begin{cases} r^2\phi''(r) + r\phi'(r) + \lambda\phi(r) = 0 \\ \phi(1) = \phi(b) = 0 \end{cases}$$

נחלק ל – 3 מקרים:

<u>$\lambda = 0$:</u>

$$r^2\phi''(r) + r\phi'(r) = 0$$

יש לנו משוואת אוילר, לכן ננחש $\phi(r) = r^m$:

$$r^2 m(m-1)r^{m-2} + rmr^{m-1} = 0$$

$$m(m-1) + m = 0$$

$$m^2 - m + m = 0$$

$$m = 0$$

מריבוי 2.

$$\Rightarrow \phi_0(r) = r^0 = 1$$

אבל יש לנו גם את:

$$\frac{\phi''(r)}{\phi'(r)} = -\frac{1}{r}$$

$$\ln(\phi'(r)) = -\ln(r) + c$$

$$\phi'(r) = c \cdot \frac{1}{r}$$

$$\phi_0(r) = c\ln(r)$$

לכן:

$$\phi(r) = c_1 \cdot 1 + c_2 \ln(r)$$

נציב תנאי התחלה:

$$0 = \phi(1) = c_2 + c_2\ln(1) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$0 = \phi(b) = c_2 \underbrace{\ln(b)}_{\substack{\neq 0 \\ b>1}} \Rightarrow c_2 = 0$$

וקיבלנו פתרון טריוויאלי.

<u>$\lambda < 0$:</u>

$$\begin{cases} r^2\phi''(r) + r\phi'(r) + \lambda\phi(r) = 0 \\ \phi(1) = \phi(b) = 0 \end{cases}$$

משוואת אוילר, לכן נציב $\phi(r) = r^m$:

$$m(m-1) + m + \lambda = 0$$

$$m^2 + \lambda = 0$$

$$m = \pm\sqrt{-\lambda}$$

לכן:

$$\phi(r) = c_1 r^{\sqrt{-\lambda}} + c_2 r^{-\sqrt{-\lambda}}$$

נציב תנאי התחלה:

$$0 = \phi(1) = c_1 + c_2 = 0$$

$$0 = \phi(b) = c_1 b^{\sqrt{-\lambda}} + c_2 b^{\sqrt{-\lambda}} = 0$$

נבדוק דטרמיננטה:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b^{\sqrt{-\lambda}} & b^{-\sqrt{-\lambda}} \end{vmatrix} = b^{-\sqrt{-\lambda}} - b^{\sqrt{-\lambda}} \neq 0$$

ואכן שונה מאפס כי $b > 1$ לכן $b \neq 1$.

הדטרמיננטה שונה מ – 0 ולכן מקבלים את הפתרון הטריוויאלי.

$$\phi(r) = 0$$

<u>$\lambda > 0$:</u>

$$\begin{cases} r^2\phi''(r) + r\phi'(r) + \lambda\phi(r) = 0 \\ \phi(1) = \phi(b) = 0 \end{cases}$$

ננחש שוב $\phi(r) = r^m$:

$$m^2 + \lambda = 0 \Rightarrow m^2 - \lambda \Rightarrow m = \pm i\sqrt{\lambda}$$

$$r^{i\sqrt{\lambda}} = \left[e^{\ln(r)}\right]^{i\sqrt{\lambda}} = e^{i\sqrt{\lambda}\ln(r)}$$

$$r^{-i\sqrt{\lambda}} = \left[e^{\ln(r)}\right]^{-i\sqrt{\lambda}} = e^{-i\sqrt{\lambda}\ln(r)}$$

לכן:

$$\phi_1(r) = \cos\left(\sqrt{\lambda}\, ln(r)\right)$$

$$\phi_2(r) = \sin\left(\sqrt{\lambda}\, ln(r)\right)$$

לכן:

$$\phi(r) = c_1\cos\left(\sqrt{\lambda}\, ln(r)\right) + c_2\sin\left(\sqrt{\lambda}\, ln(r)\right)$$

נציב תנאי התחלה:

$$\phi(1) = c_1\cos(0) + c_2\sin(0) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{c_1 = 0}$$

$$\phi(b) = \underbrace{c_2}_{\neq 0}\sin\left(\sqrt{\lambda}\, ln(b)\right) = 0$$

$$\sqrt{\lambda}\ln(b) = n\pi$$

$$\boxed{\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ln(b)}\right)^2}$$

אלו הע"ע ונקבל גם את הפ"ע:

$$\phi_n(r) = c_n\sin\left(\frac{n\pi}{ln(b)}ln(r)\right)$$

ג) נראה אורתוגונליות ביחס לפו' המשקל:

$$r(r) = \frac{1}{r}$$

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{ln(b)}\,, \lambda_m = \frac{m\pi}{ln(b)}$$

$$\phi_n(r)=\sin\left(\frac{n\pi}{ln(b)}ln(r)\right),\ \phi_m(r)=\sin\left(\frac{m\pi}{ln(b)}ln(r)\right)$$

נבדוק את המכפלה הפנימית:

$$\langle\phi_n(r),\phi_m(r)\rangle=\int_1^b\phi_n(r)\phi_m(r)\cdot\frac{1}{r}dr$$
$$=\int_1^b\sin\left(\frac{n\pi}{ln(b)}ln(r)\right)\sin\left(\frac{m\pi}{ln(b)}ln(r)\right)\frac{1}{r}dr$$

נצבע החלפת משתנים:

$$\ln(r)=t$$

$$\frac{1}{r}dr=dt$$

נציב:

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\ln(b)}\cos\left(\frac{\pi}{\ln(b)}(n-m)t\right)-\cos\left(\frac{\pi}{\ln(b)}(n+m)t\right)dt$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{\ln(b)}(n-m)t\right)}{\frac{\pi}{\ln(b)}(n-m)}-\frac{\sin\left(\frac{\pi}{\ln(b)}(n+m)t\right)}{\frac{\pi}{\ln(b)}(n+m)}\right]_0^{\ln(b)}=0$$