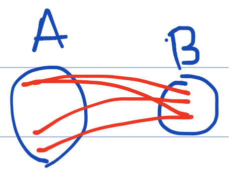
פונקציות

הגדרה: יהיו A,B קבוצות וR יחס בינהן. אזי:

- התחום של R הינו $dom(R) = \{a \in A | \exists b \in B : (a,b) \in R\} = \{(*,\ ),(*,\ )\dots\}$
- התמונה של R הינה $im(R) = \{b \in B | \exists a \in A : (a,b) \in R\} = \{(\ ,*),(\ ,*)\dots\}$

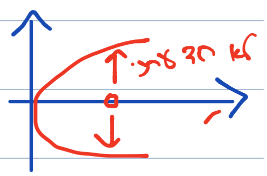
הערה: ישירות מהגדרה מתקיים כי $dom(R) \subseteq A, Im(R) \subseteq B$

דוגמא:



- אם R יחס מלא על A אזי האיחוד של התמונה והתחום שווה A (כי כל שני איברים ניתן להשוות)
- $R = \{(1,a),(2,b),(3,a),(a,1)\}$ אזי התחום הוא $dom(R) = \{1,2,3,a\}$ והתמונה הינה $im(R) = \{a,b,1\}$

הגדרה:



- יחס R מ-A ל-B נקרא **על** אם $im(R) = B$ כלומר $\forall b \in B \exists a \in A : (a,b) \in R$
- יחס R מ-A ל-B נקרא **שלם** אם $dom(R) = A$ כלומר $\forall a \in A \exists b \in B : (a,b) \in R$
- יחס R נקרא **חד ערכי** אם $[(x,b) \in R] \wedge [(x,d) \in R] \rightarrow (d = b)$ כלומר אין איבר שנשלח ל-2 מקומות שונים
- יחס R נקרא **חד-חד ערכי** אם $[(x,b) \in R] \wedge [(y,b) \in R] \rightarrow (x = y)$ כלומר איברים שונים נשלחים למקומות שונים (כלומר, היחס ההופכי הינו חד ערכי)

$R^{-1} = \{(b,a) | (a,b) \in R\}$

הגדרה:

יחס חד ערכי ושלם נקרא **פונקציה;** נסמן במקרה זה $(a,b) \in R \leftrightarrow b = R(a)$. ובאופן כללי $a \mapsto f(a)$, $f : A \rightarrow B$. (A נקרא תחום (הגדרה) של הפונקציה. ו B נקרא הטווח של הפונקציה)

נחזור על הגדרת חח"ע עבור פונקציה:

f חח"ע אמ"מ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ אמ"מ $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

הגדרה:

תהא A קבוצה. **פונקציית הזהות** היא פונקציה $f : A \rightarrow A$ המקיימת $\forall a \in A : f(a) = a$.
נהוג לסמנה: id_A פונקציית הזהות היא חח"ע ועל.

תרגיל: תהיה $f,g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ כך ש $f(n) = g(3n-1)$
הוכיחו ש f על $\leftarrow$ g לא חח"ע.

פתרון:

$g(1) = k \in \mathbb{N}$

$\exists n \in \mathbb{N} : f(n) = k \longrightarrow g(3n-1) = k$

$k = g(1) = g(3n-1)$

אם g הייתה חח"ע $1 = 3n-1$, לא קיים $n \in \mathbb{N}$ שמקיים זאת, בסתירה.

דוגמאות:

- $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ כאשר $f(p)=p^2$ לא חח"ע $f(p)=f(-p)$ לא על $7\notin Im(f)$
- $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ כאשר $f(p)=p^2$ חח"ע
- $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ כאשר $f(p)=p$. $id_{\mathbb{Z}}$ חח"ע על
- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כאשר $f(x)=x-1$ חח"ע ועל
- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י הכלל $f(x)=\sin(x)$. $Im(f)=[-1,1]$ לא חח"ע
- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י הכלל $f(x)=x^3$ חח"ע + על
- $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ המוגדרת ע"י הכלל $f(x)=x^2$ לא חח"ע, על
- $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ כאשר $f(x)=x-1$ לא מוגדרת כי $f(1)=0\notin\mathbb{N}$
- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$ כאשר $f(x)=[x]$ מוגדר להיות הערך השלם הקרוב ביותר ל-x (במקרה של חצי לוקחים את הגבוה) לא חח"ע, כן על
- $f:\mathbb{Z}_2\to\mathbb{Z}_3$ כאשר לוקחים את 0 לס ואת 1 ל1. לא על כי $2\notin Im f$ כן חח"ע

$\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$

- $D:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקצית דיריכלה: על כל מספר רציונאלי מקבלת 1 ועל כל מספר אי רציונאלי מקבלת אפס. לא על, לא חח"ע
- תהא A קבוצה ו $B\subseteq A$ תת קבוצה. הפונקציה

$$\chi_B=\begin{cases}1 & \text{if } x\in B\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

פונקצית האינדקטור. במקרה של דריכלה $D=\chi_{\mathbb{Q}}$

$\chi_B:A\to\{0,1\}$ לא חח"ע (תלוי בגודל הקבוצה)

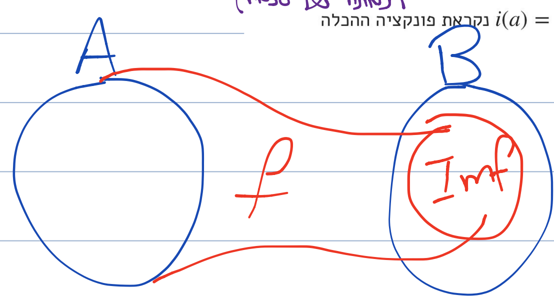
$A=\{1,2\}$
$B=\{2\}$

$A=B \leftarrow \chi_B[A]=\{1\}$ לא על

$A\supset B \leftarrow \chi_B[A]=\{0,1\}$ על.

- תהא $f:A\to B$ אזי $g:A\to Im(f)$ המוגדרת $g(a)=f(a)$ על (כל פונק' היא על התמונה של עצמה)
- תהא $B\subseteq A$ אזי הפונקציה $i:A\to B$ המוגדרת $i(a)=a$ נקראת פונקציה ההכלה (במקרה ש $A=B$ זה פונקצית הזהות).

אם $A\subset B$, לא על
כן חח"ע



g

תרגיל

קבעו האם הפונקציות הבאות חח"ע/על

- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת $f(x)=\lfloor x\rfloor$
- $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ המוגדרת $f(n,m)=n-m$

לא חח"ע - $\lfloor 0.8\rfloor=\lfloor 0.9\rfloor$ $0.8=0.9-1$ לא על $Im(f)=\mathbb{Z}$

לא חח"ע $(3,2)\neq(4,3)$ $f(4,3)=f(3,2)=1$

כן על.

תרגיל

מצאו פונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ על שאינה חח"ע.

$a\mapsto\lceil\frac{a}{2}\rceil$

$n=1\longmapsto 1$

$n>1\quad n\longmapsto n-1$

$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ חח"ע ולא על: $f(n)=2n$, $g(n)=n+c$, $f(n)=n^2$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ חח"ע ולא על: exp. (התוצאה $0<$) $f(x)=e^x$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ על ולא חח"ע (כמו הסעיף הראשון)

תרגיל

תהא A קבוצה ו $f:A\to\mathbb{N}$ פונקציה. נגדיר יחס R על A ע"י $aRa' \iff f(a)\le f(a')$.

הוכיחו כי R יחס סדר על A אמ"מ f חח"ע.

$\boxed{\Leftarrow}$ R יחס-סדר (רפלקסיבי, טרנזיטיבי, א"ס)

$x,y\in A:\ f(x)=f(y)$

$xRy,\ yRx\rightarrow x=y$

א"ס

חילופיות שיוויון

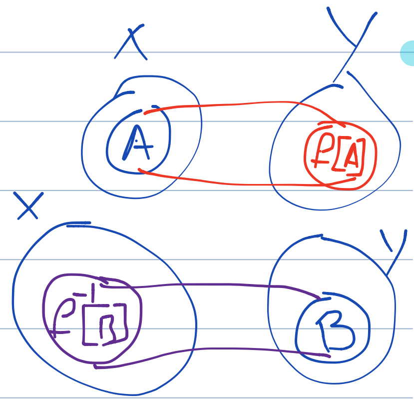
$\boxed{\Rightarrow}$ רפלקסיבי $f(a)=f(a)$

טרנזיטיבי $\leftarrow$ $\le$ יחס סדר על הטבעיים.

א"ס $aRb\wedge bRa\iff f(a)\le f(b)\wedge f(b)\le f(a)$ בגלל $\le$ יחס סדר הלא

$f(a)=f(b)$. f חח"ע $\leftarrow$ $\boxed{a=b}$

תמונות חלקיות



הגדרה. תהי $f: X \to Y$ פונקציה, ויהיו תת קבוצות $A \subseteq X, B \subseteq Y$. אזי **התמונה החלקית של A תחת f** היא התת-קבוצה $f[A] = \{f(a) | a \in A\}$ ו**התמונה החלקית ההפוכה של B תחת f** היא התת-קבוצה $f^{-1}[B] = \{a \in X | f(a) \in B\}$.

שימו לב להבדל בין התמונה ההפוכה $f^{-1}(B)$ לבין הפונקציה ההופכית $f^{-1}(y)$. התמונה ההפוכה איננה מניחה כי הפונקציה f הפיכה. הדרך להבחין בין פונקציה הפיכה לתמונה ההפוכה היא לבדוק האם בין הסוגריים נמצא *איבר* של התמונה (בדוגמאות לעיל זהו $y \in Y$) או שנמצאת *תת-קבוצה* של התמונה (בדוגמאות לעיל זו $B \subseteq Y$).

דוגמאות

תהא $D: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקצית דריכלה. אזי

$D(\mathbb{Q}) = \{1\}, D^{-1}(\{1\}) = \mathbb{Q} = D^{-1}((0.5, 18))$

$D^{-1}[(-0.5,18)] = \mathbb{R}$

$\forall r \in \mathbb{R}: D(r) = \begin{cases} 0 & r \notin \mathbb{Q} \\ 1 & r \in \mathbb{Q} \end{cases} \in (-0.5, 18)$

תהא $f: X \to Y$ פונקציה. אזי $f^{-1}(Y) = X$

תהא $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ פונקצית הערך השלם התחתון. אזי

$f((-0.5, 3/4)) = \{-1, 0\}, f^{-1}(\{1\}) = [1, 2)$

תכונות

1. אם $A_1 \subseteq A_2$ אזי $f(A_1) \subseteq f(A_2)$
2. אם $B_1 \subseteq B_2$ אזי $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$

תרגיל

הוכח/הפרך: תהיינה $A, B \subseteq X$ ותהי f פונקציה $f: X \to Y$. אזי

$f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$

פתרון.

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}: \begin{cases} n-1 & n \text{ even} \\ n & n \text{ odd} \end{cases}$

$A = \{odd(\mathbb{N})\}$

$B = \{even(\mathbb{N}), 1\}$

$f[A] = A =$ אי זוגי $\quad f[A] \cap f[B] = A$

$f[B] = A =$ אי זוגי $\quad A \cap B = \{1\}$

$f[A \cap B] = 1$ הפרכנו.

$f[A] \cap f[B] = f[A \cap B]$ שימו לב - אם f חח"ע הנ"ל מתקיים.

f חח"ע, $x \in f[A] \cap f[B] \leftrightarrow x \in f[A] \wedge x \in f(B) \leftrightarrow \exists a \in A: f(a) = x \wedge \exists b \in B: f(b) = x$

$f(a) = f(b) \leftarrow a = b$ לכן a נמצא גם בB, לכן $a \in A \cap B$

$\downarrow$

$x \in f[A \cap B]$

צד שני דומה.

תהי $f : X \to Y$ ותהי $A \subseteq Y$. הוכח $f(f^{-1}(A)) \subseteq A$ וקיים שיוויון אם f על

פתרון.

יהי $f(x) \in f(f^{-1}(A))$ כאשר $x \in f^{-1}(A)$ $\leftarrow$ $\exists y \in A : f(x) = y$

$$\downarrow$$

$$f(x) \in A$$

נוכיח את ההכלה בכיוון השני בהינתן f על.

יהי $a \in A$. f על $\leftarrow$ $\exists x \in X : f(x) = a$ לכן $x \in f^{-1}[A]$ ואז $a = f(x) \in f[f^{-1}[A]]$

דוגמא להכלה ממש:

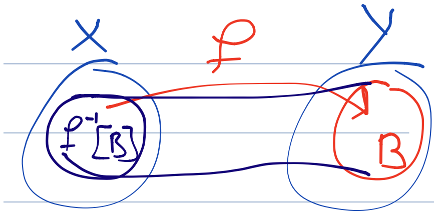
$f : \{1\} \longrightarrow \{1,2\}$ $\quad 1 \longmapsto 1$

$B = \{1,2\}$ $\quad f^{-1}[B] = \{1\}$

$f[f^{-1}[B]] = \{1\} \neq B$

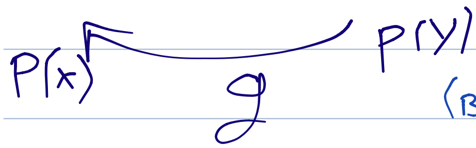
תרגיל ממבחן (קצת משודרג)

יהיו X, Y שתי קבוצות, ותהי $f : X \to Y$ פונקציה כלשהי. נגדיר את הפונקציה $g : P(Y) \to P(X)$ על ידי $g(B) = f^{-1}(B)$. בדוק את הקשר בין החח"ע/על של f לבין אלה של g. (כלומר, מה גורר את מה בהכרח).



פתרון.

נתחיל בהוכחה f על $\Leftrightarrow$ g חח"ע.



$\boxed{\Leftarrow}$ נתון f על.

נניח $g(B)=g(A)$ (כדי להוכיח חח"ע נראה $B=A$)

$f^{-1}[B]=f^{-1}[A]$ נפעיל את f על שני הצדדים

$$B=f[f^{-1}[B]]=f[f^{-1}[A]]=A$$

$\boxed{\Rightarrow}$ g חח"ע. נניח בשלילה f לא על $\exists y\in Y\ \forall x\in X : f(x)\neq y$

לכן: $f^{-1}[Y]=f^{-1}[Y\setminus\{y\}]$

$g(Y)=g(Y\setminus\{y\})$ בסתירה לחח"ע של g

נוכיח f חח"ע $\Leftrightarrow$ g על.

$\boxed{\Leftarrow}$ נתון f חח"ע יהי $A\in P(Y)$

לכן המקור של A יהיה $f(A)$.

$$g(f(A))=f^{-1}(f(A))=A$$

כיוון f חח"ע יש שוויון (בשונה משוויון של הכלה)

$\boxed{\Rightarrow}$ נתון g על. נניח בשלילה f לא חח"ע. קיימים $x,y\in X$ שונים $f(x)=f(y)$ $f:X\to Y$

נבחר בנקודה $A=\{x\}$ כיוון ש-g על קיימת $B\subseteq Y$ $(B\in P(Y))$ $g:P(Y)\to P(X)$ $g(B)=f^{-1}(B)$

$$f^{-1}(B)=g(B)=A=\{x\}$$

$$\{f(x)\}=f(A)=f(f^{-1}(B))\subseteq B$$

נסתכל על התמונה ההפוכה של $\{f(x)\}$

$$\{x,y\}\subseteq f^{-1}(\{f(x)=f(y)\})=f^{-1}(\{f(x)\})\subseteq f^{-1}(B)=g(B)=A=\{x\}$$

$\{x,y\}\subseteq\{x\}\longrightarrow x=y$ בסתירה להנחה

(נשים לב "ייתכן" f חח"ע ו-g לא על
g חח"ע f לא

$X=\mathbb{Z},\ Y=\{0\}$ $f:X\to Y$ g חח"ע $\longrightarrow$ $g(\phi)=\phi$ $g(\{0\})=f^{-1}(\{0\})=\mathbb{Z}$ $g:P(Y)\to P(X)$

$f: z\longmapsto 0$ (לא חח"ע) $P(Y)=\{\phi,\{0\}\}$

הוכח: $(f^{-1}[B]=\{a\in X \mid f(a)\in B\},\ f:X\to Y,\ B\subseteq Y)$, $f^{-1}[A]\cap f^{-1}[B]=f^{-1}[A\cap B]$

תצוית

$\supseteq$ $\quad x\in f^{-1}[A\cap B]\longrightarrow \exists y\in A\cap B\ \ f(x)=y \ ,\ \ y\in A\wedge y\in B$

$$\downarrow$$

$$x\in f^{-1}[A]\cap f^{-1}[B] \longleftarrow x\in f^{-1}[A]\wedge x\in f^{-1}[B]$$

$\subseteq$ $\quad x\in f^{-1}[A]\cap f^{-1}[B]\longrightarrow \exists a\in A\ f(x)=a\ ,\ \exists b\in B\ f(x)=b$

$$\ni f(x)=a=b\longrightarrow f(x)\in A\wedge f(x)\in B\longrightarrow f(x)\in A\cap B$$

$$\downarrow$$

$$x\in f^{-1}[A\cap B]$$

מש"ל

באופן דומה ניתן להוכיח

$$f^{-1}[A]\cup f^{-1}[B]=f^{-1}[A\cup B]$$

$$f^{-1}[A]\setminus f^{-1}[B]=f^{-1}[A\setminus B]$$