תרגיל בית 1 – טופולוגיה

**שאלה 1**

הוכיחו כי בכל מרחב מטרי  מתקיים:

1.  לכל .
2. .

**שאלה 2**

נסמן ב- את אוסף כל הסדרות שאיברהן שייכים לקבוצה . נגדיר את הפונקציה הבאה:  על ידי: . הוכיחו כי  היא אולטרה מטריקה על .

**שאלה 3**

תהי  פונקציה המקיימת לכל :

1. 
2. 

הוכיחו ש- מגדירה מטריקה על .

**שאלה 4**

הוכיחו או הפריכו: הפונקציות הבאות הן מטריקות.

1.  על 
2.  על 
3.  על , כאשר  הוא מרחב מטרי.

**שאלה 5**

תזכורת: הגדרנו בכיתה את המטריקה ה p-adic באופן הבא: עבור  ראשוני מגדירים מטריקה על -  
 , עבור .

1. הוכיחו ש.
2. תארו את הכדור  במרחב .
3. עבור  מצאו דוגמה לסדרה לא קבועה במרחב  המתכנסת ל-.

**שאלה 6**

יהיו  ו-  ויהיו  כדורים פתוחים שחיתוכם אינו ריק. תהי , ו - 

הוכיחו ש- .

**שאלה 7**

הגדרה: תהי  סדרה במרחב מטרי כלשהו . נאמר שהסדרה היא "קבועה לבסוף" אם קיים  כך שקיים  עבורו לכל  מתקיים .

1. הוכיחו כי בכל מרחב מטרי, כל סדרה קבועה לבסוף מתכנסת.
2. הוכיחו כי סדרה מתכנסת במרחב מטרי **דיסקרטי** אם ורק אם היא קבועה לבסוף.

**שאלה 8**

במרחב  הראו שהסדרה  מתכנסת, ומצאו את גבולה.

**שאלה 9**

1. הוכיחו את הטענה הכללית הבאה: יהי  מרחב מטרי, ויהי  תת מרחב מטרי שלו. תהי  ו- . אזי  אמ"מ .

נתבונן במרחב  כאשר  הוא קבוצת המספרים האי-רציונאליים, ו-  היא המטריקה הסטנדרטית המושרית מ-. נגדיר את הסדרה הבאה: .

1. הוכיחו שהסדרה .
2. הוכיחו שהסדרה אינה מתכנסת בתת המרחב המטרי .

**שאלת אתגר**

הראו שאם  מרחב נורמי ו-  המטריקה המושרה מהנורמה אזי **לא** קיימים כדורים **שונים** כאשר  ו .

**בהצלחה!**