

תרגיל בית 9 – טופולוגיה

שאלה 1

א. הוכיחו שכל מרחב טופולוגי דיסקרטי הוא קומפקטי אמ"מ הוא סופי.
ב. יהי X מ"ט קומפקטי. יהי $\{K_i\}_{i \in I}$ אוסף קבוצות סגורות, כך שכל חיתוך

$$\bigcap_{i \in I} K_i \neq \emptyset$$
 סופי של קבוצות מאוסף זה אינו ריק. הוכיחו ש- $\bigcap_{i \in I} K_i \neq \emptyset$.

שאלה 2

א. יהי (X, τ) מרחב טופולוגי. יהיו A_1, \dots, A_n תת-מרחבים קומפקטיים של

$$X. \text{ הוכיחו ש-} \bigcup_{i=1}^n A_i \text{ הוא קומפקטי.}$$

ב. מצאו דוגמה נגדית כאשר מדובר באינסוף תת-מרחבים קומפקטיים.
ג. יהי X מ"ט האוסדורף. יהי $\{F_i\}_{i \in I}$ אוסף כלשהו של תת-מרחבים

$$\text{קומפקטיים. הוכיחו כי } \bigcap_{i \in I} F_i \text{ קומפקטי.}$$

שאלה 3

תהי $f: X \rightarrow Y$ פונקציה חח"ע ועל.

א. הוכיחו שאם f פתוחה או סגורה ואם X הוא האוסדורף אזי Y הוא האוסדורף.

ב. הוכיחו שאם f רציפה ו- Y האוסדורף, אזי X האוסדורף.

שאלה 4

יהי (X, τ) מרחב טופולוגי האוסדורף. יהי $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ אוסף של תת-מרחבים

$$\text{קומפקטיים לא ריקים כך שמתקיים } E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq \dots. \text{ הוכיחו ש-} \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \neq \emptyset.$$

תנו דוגמה נגדית למקרה שהתת-מרחבים אינם קומפקטיים.

שאלה 5

- א.** יהי (X, τ) מרחב טופולוגי אינסופי המקיים את התכונה הבאה: כל תת-מרחב הוא קומפקטי. הוכיחו ש- (X, τ) אינו האוסדורף.
- ב.** יהי (X, τ) מרחב טופולוגי שאינו בן מניה ואינו קומפקטי. הוכיחו שקיים ב- X מספר לא בן מניה של תת-מרחבים קומפקטיים ומספר לא בן מניה של תת-מרחבים לא קומפקטיים.
- ג.** יהי (X, τ) מרחב טופולוגי, כך שכל תת-מרחב סגור לא טריוויאלי הוא קומפקטי. הוכיחו ש- (X, τ) קומפקטי.

בהצלחה!