3.1.2021

תרגול 11 - תורת גלואה

① מה ממד שדה הפיצול של ?x^4-2x^2+289

K

נפתור:

$$\frac{2\pm\sqrt{4-4\cdot 289}}{2} = 1\pm 12\sqrt{-2}$$

$$\pm\sqrt{1\pm 12\sqrt{-2}}$$

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[d, dash, "?"'] \arrow[dr, dash] & \\
\mathbb{Q}(\sqrt{-2}) \arrow[d, dash, "2"'] \arrow[r, dash] & \mathbb{Q}(\sqrt{1+12\sqrt{-2}}) \\
\mathbb{Q} &
\end{tikzcd}$$

רעיון

$$\sqrt{1+12\sqrt{-2}} \overset{?}{\in} \mathbb{Q}(\sqrt{-2})$$

$$1+12\sqrt{-2} = (\alpha+\beta\sqrt{-2})^2 \quad , \quad \alpha,\beta\in\mathbb{Q}$$

$$N_{\mathbb{Q}(\sqrt{-2})/\mathbb{Q}}(*)$$

$$1^2+144 = (\alpha^2+2\beta^2)^2$$

$$289$$

$$\Longrightarrow \alpha^2+2\beta^2 = 17 \Longrightarrow 3+2\sqrt{-2}$$

$$(3+2\sqrt{-2})^2 = 9-8+12\sqrt{-2} = 1+12\sqrt{-2}$$

סיכום: $\sqrt{1+12\sqrt{-2}} \in \mathbb{Q}(\sqrt{-2}) \Rightarrow K=\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$.

$[K:\mathbb{Q}]=2$.

② הוכיחו/הפריכו:

$[K:F_{1,2}]<\infty$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & K \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ F_1 \arrow[dr, dash] & & F_2 \arrow[dl, dash] \\ & F_1\cap F_2 & \end{tikzcd}$$

$$\overset{?}{\not\Rightarrow} \quad [K:F_1\cap F_2]<\infty$$

רעיון:

$$\underset{\shortparallel}{GL_2(\mathbb{C})/\mathbb{C}^\times} \qquad \mathbb{C}(z)$$

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\in PGL_2(\mathbb{C}) \rightsquigarrow z\longmapsto \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$$

אוטומורפיזם של $\mathbb{C}(z)$. מתברר שכל האוטומורפיזמים

מגיעים מצורה זו.

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}(z))\cong PGL_2(\mathbb{C})$$

$S: z\longmapsto -\frac{1}{z}$

$T: z\longmapsto -\frac{1}{z+1}$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & K=\mathbb{C}(z) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \underbrace{\mathbb{C}(z)^{\langle S\rangle}}_{F_1} & & \underbrace{\mathbb{C}(z)^{\langle T\rangle}}_{F_2} \end{tikzcd}$$

תרגיל לקוראים:

$[K:F_{1,2}]<\infty$

אבל $F_1\cap F_2=\mathbb{C}$.

(3) פתרו ברדיקלים את $\cos 24^\circ$.

$$\cos 24^\circ = \frac{1}{2}\left(\rho_{15} + \rho_{15}^{-1}\right)$$

$$U_{15} = \{\underset{1}{1}, \underset{4}{2}, \underset{2}{4}, \underset{4}{7}, \underset{4}{8}, \underset{2}{11}, \underset{4}{13}, \underset{2}{14}\}$$

$$U_{mn} \cong U_m \times U_n$$

$$U_{15} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$$

$$\begin{array}{c}
K = \mathbb{Q}(\rho_{15}) \\
\Big| \; 2 \\
K^{\{1,14\}} = K_1 = \mathbb{Q}(\rho + \rho^{-1}) \\
\Big| \; 2 \\
\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \leftarrow K^{\{1,4,11,14\}} = K_2 \ni \beta, \quad \mathbb{Q}(\sqrt{5}) = K_2 \\
\Big| \; 2 \\
\mathbb{Q}
\end{array}$$

$$\alpha = \rho + \rho^{-1} \qquad \left(\cos\frac{2\pi}{15} = \frac{1}{2}\alpha\right)$$

כדי למצוא משוואה ריבועית ל-α מעל K_2, נחשב עקבה ונורמה.

$$\beta = \mathrm{Tr}_{K_1/K_2}(\alpha) \qquad , \qquad \gamma = N_{K_1/K_2}(\alpha)$$

$$\| \; \rho + \rho^4 + \rho^{11} + \rho^{14}$$

כדי למצוא משוואה ריבועית ל-β מעל $\mathbb{Q}$, נחשב עקבה ונורמה.

• $Tr_{K_2/\mathbb{Q}}(\beta) = \rho + \rho^4 + \rho^{11} + \rho^{14} + \rho^2 + \rho^8 + \rho^7 + \rho^{13} =$

$$= \underbrace{-1 - \rho^3 - \rho^5 - \rho^6 - \rho^9 - \rho^{10}}_{0} - \rho^{12} = 1$$

$\rho_{15}^5 = \rho_3$

כי: $\rho_{15}^3 = \rho_5$:

$1 + \rho_5 + \rho_5^2 + \rho_5^3 + \rho_5^4 = 1 + \rho_{15}^3 + \rho_{15}^6 + \rho_{15}^9 + \rho_{15}^{12} = 0$

• $N_{K_2/\mathbb{Q}}(\beta) = (\rho + \rho^4 + \rho^{11} + \rho^{14})(\rho^2 + \rho^8 + \rho^7 + \rho^{13}) =$

$$= \left\{ \begin{array}{cc|cc} 3 & 9 & 8 & 14 \\ 6 & 12 & 11 & 2 \\ \hline 13 & 4 & 3 & 9 \\ 1 & 7 & 6 & 12 \end{array} \right\} = -1 + (\underbrace{-1 - \rho^5 - \rho^{10}}_{\rho_{15}^5 = \rho_3}) = -1$$

-1

$\sum_{i=0}^{14} \rho_{15}^i = 0$

$\rho + \rho^3 + \rho^6 + \rho^9 + \rho^{12} = -1$

סה"כ: $\beta^2 - \beta - 1 = 0$

$\Leftarrow$ $\beta = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

• $\gamma = N_{K_1/K_2}(\alpha) = (\rho + \rho^{14})(\rho^4 + \rho^{11}) = \rho^5 + \rho^{12} + \rho^3 + \rho^{10} =$

עבור γ בדומה:

$= -1 + \rho^3 + \rho^{12}$

$$\mathrm{Tr}_{K_2/\mathbb{Q}}(\gamma) = (-1+\rho^3+\rho^{12}) + (-1+\rho^6+\rho^9) =$$

$$\underset{\overset{\|}{K_2^{\langle 2\rangle}}}{} = \underbrace{\rho^3+\rho^6+\rho^9+\rho^{12}}_{=\,-1} - 2 = \underline{-3}$$

סכום הפרימ' של ה-5-יים פרימ' $\longrightarrow -1$

$$N_{K_2/\mathbb{Q}}(\gamma) = (-1+\rho^3+\rho^{12})\cdot(-1+\rho^6+\rho^9) = (\cdots) = \underline{1}$$

$$\gamma = \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \Leftarrow \gamma^2 + 3\gamma + 1 = 0$$

סיכום:

$$\alpha^2 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\alpha + \left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\cos 24^\circ = \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 2(-3+\sqrt{5})}}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2} + 6 - 2\sqrt{5}}\right) =$$

$$\frac{1}{8}(1+\sqrt{5}) + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}(5-\sqrt{5})}$$