דיפרנציאביליות

הגדרה

תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה.

תהי $f: E \to \mathbb{R}$.

יהי $v \in \mathbb{R}^n$ ווקטור יחידה, כלומר $\|v\| = 1$.

אם קיים הגבול:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

אז הוא נקרא **הנגזרת הכיוונית** של f בנקודה x_0 בכיוון v, ויסומן:

$$\mathrm{D}_v f(x_0)$$

או:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$$

הערה

אם בהגדרת הנגזרת הכיוונית:

$$v = e_i$$

אז נקבל את הנגזרת החלקית:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

משפט

תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה.

תהי $f: E \to \mathbb{R}$.

תהי $x_0 \in E$.

אם f דיפרנציאבילית ב - x_0, אז הנגזרת הכיוונית בנקודה x_0 בכיוון כלשהו v קיימת, ומתקיים:

$$\mathrm{D}_v f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) v_i$$

הוכחה

f דיפרנציאבילית ב - x_0, לכן:

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) h_i + r(h)$$

כאשר:

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$$

ניקח $h = tv$, ונקבל:

$$\frac{f(x_0+tv) - f(x_0)}{t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) v_i + \frac{r(tv)}{t}$$

מתקיים:

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$$

לכן:

$$\lim_{t \to 0} \frac{r(tv)}{t} = 0$$

לכן:

$$\mathrm{D}_v f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) v_i$$

■

הגדרה

תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה.

תהי $f: E \to \mathbb{R}$.

תהי $x_0 \in E$.

הגרדיאנט של f ב - x_0 הוא הווקטור:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right)$$

ויסומן:

$$\mathrm{grad} f(x_0)$$

או:

$$\nabla f(x_0)$$

למה

תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה.

תהי $f: E \to \mathbb{R}$.

תהי $x_0 \in E$.

אם f רציפה ב - x_0 ו - $\mathrm{grad} f(x_0) \neq 0$, אז הנגזרת הכיוונית $\mathrm{D}_v f(x_0)$ מקבלת מקסימום בכיוון $\mathrm{grad} f(x_0)$.

הוכחה

עפ"י משפט:

$$\mathrm{D}_v f(x_0) \quad = \quad \langle \mathrm{grad} f(x_0), v \rangle$$

עפ"י אי-שוויון קושי שוורץ:

$$|\mathrm{D}_v f(x_0)| \quad \leq \quad \|\mathrm{grad} f(x_0)\| \cdot \|v\|$$

v ווקטור יחידה, לכן:

$$|\mathrm{D}_v f(x_0)| \quad \leq \quad \|\mathrm{grad} f(x_0)\|$$

אולם, אם:

$$v \quad = \quad \frac{\mathrm{grad} f(x_0)}{\|\mathrm{grad} f(x_0)\|}$$

אז:

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_v f(x_0) &= \frac{\langle \mathrm{grad} f(x_0), \mathrm{grad} f(x_0) \rangle}{\|\mathrm{grad} f(x_0)\|} \\ &= \|\mathrm{grad} f(x_0)\| \end{aligned}$$

לכן:

$$\max_{\|v\|=1} \mathrm{D}_v f(x_0) = \|\mathrm{grad} f(x_0)\|$$

■

הגדרה

יהיו $a, b \in \mathbb{R}^n$.

קטע $[a, b]$ ב - $\mathbb{R}^n$ הוא אוסף הנקודות:

$$t \cdot a + (1-t) \cdot b \quad , \quad t \in [0,1]$$

משפט (לגרנז')

תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה.

תהי $f: E \to \mathbb{R}$.

יהי $[a, b] \subseteq E$ קטע.

אם f דיפרנציאבילית בכל נקודה בקטע $[a, b]$, אז קיימת נקודה $\xi \in [a, b]$ כך ש:

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$$

משפט

תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה וקשירה (מסילתית).

תהי $f: E \to \mathbb{R}$.

אם לכל $x \in E$ מתקיים: $f'(x) = 0$, אז f קבועה ב - E.

הוכחה

יהי $B \subseteq E$ כדור פתוח.

B קבוצה קמורה, לכן אם $a, b \in B$, אז $[a, b] \subseteq B$.

עפ"י משפט, קיים $\xi \in [a, b]$ כך ש:

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

$b - a \in E$, לכן:

$$f'(\xi)(b - a) = 0$$

לכן:

$$f(b) - f(a) = 0$$

לכן:

$$f(a) = f(b)$$

יהיו $x_0, x_1 \in E$.

E פתוחה, לכן קיים $0 < r$ כך ש:

$$B(x_0, r) \subseteq E$$

E קשירה, לכן קיימת מסילה $\gamma: [0,1] \to E$ כך ש:

$$\gamma(0) = x_0$$

$$\gamma(1) = x_1$$

γ מסילה, לכן רציפה, לכן קיים $0 < \delta$ כך שלכל $t \in [0, \delta]$ מתקיים:

$$\gamma(t) \in B(x_0, r)$$

לכן, לכל $t \in [0, \delta]$ מתקיים:

$$f\big(\gamma(t)\big) = f(x_0)$$

נסמן:

$$\ell := \sup\left\{\delta \in [0,1] \,\middle|\, \forall t \in [0, \delta] : f\big(\gamma(t)\big) = f(x_0)\right\}$$

נוכיח כי:

$$\ell = 1$$

E פתוחה ו - γ רציפה, לכן:

$$f\big(\gamma(\ell)\big) = f(x_0)$$

נניח בשלילה כי:

$$\ell < 1$$

E פתוחה, לכן קיים $s > 0$ כך ש:

$$B\big(\gamma(\ell)\big) \subseteq E$$

γ רציפה, לכן קיים $\Delta > 0$ כך שלכל $t \in [\ell, \ell + \Delta]$ מתקיים:

$$\gamma(t) \in B(\gamma(\ell), s)$$

לכן, לכל $t \in [0, \ell + \Delta]$ מתקיים:

$$f\big(\gamma(t)\big) = f(x_0)$$

בסתירה להגדרת ℓ.

לכן:

$$\ell = 1$$

לכן:

$$f(x_0) = f\big(\gamma(1)\big)$$

לכן:

$$f(x_0) = f(x_1)$$

לכן, f קבועה ב - E.

$$\blacksquare$$

הגדרה

תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה.

תהי $f: E \to \mathbb{R}^m$.

יהי $x_0 \in E$.

f **דיפרנציאבילית** ב - x_0 אם קיימת פונקציה לינארית $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ כך ש:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - A(h)\|}{\|h\|} = 0$$

לפונקציה A קוראים **הנגזרת** של f ב - x_0, ומסמנים $f'(x_0)$ או $\mathrm{D}f(x_0)$.

למטריצה המייצגת של A קוראים **מטריצת יעקובי**.

נרשום:

$$f = (f_1, \cdots, f_m)$$

כאשר לכל $1 \le i \le m$:

$$f_i: E \to \mathbb{R}$$

פונקציה ממשית.

נרשום:

$$A = (A_1, \cdots, A_m)$$

כאשר לכל $1 \le i \le m$:

$$A_i: E \to \mathbb{R}$$

פונקציה לינארית.

למה

תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה.

תהי $f: E \to \mathbb{R}^m$.

יהי $x_0 \in E$.

f דיפרנציאבילית ב - x_0 אם ורק אם לכל $1 \le i \le m$, f_i דיפרנציאבילית ב - x_0.

אם f דיפרנציאבילית ב - x_0, מטריצת יעקובי מוגדרת על-ידי:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

הוכחה

$\boxed{\Leftarrow}$

נניח כי f דיפרנציאבילית ב - x_0.

לכן, קיימת פונקציה לינארית A כך ש:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x_0+h) - f(x_0) - A(h)\|}{\|h\|} \quad = \quad 0$$

לכל $1 \le i \le m$, מתקיים:

$$|f_i(x_0+h) - f_i(x_0) - A_i(h)| \quad \le \quad \|f(x_0+h) - f(x_0) - A(h)\|$$

לכן:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f_i(x_0+h) - f_i(x_0) - A_i(h)}{\|h\|} \quad = \quad 0$$

לכן, f_i דיפרנציאבילית ב - x_0 ומתקיים:

$$A_i(h) \quad = \quad \langle \mathrm{grad} f_i(x_0), h \rangle$$

$\boxed{\Rightarrow}$

נניח כי לכל $1 \le i \le m$, f_i דיפרנציאבילית ב - x_0.

לכן:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f_i(x_0+h) - f_i(x_0) - A_i(h)}{\|h\|} \quad = \quad 0$$

לכן:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x_0+h) - f(x_0) - A(h)\|}{\|h\|} \quad = \quad 0$$

לכן, f דיפרנציאבילית ב - x_0.

■

הגדרה

תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה.

תהי $f: E \to \mathbb{R}^n$.

יהי $x_0 \in E$.

אם f דיפרנציאבילית ב - x_0, אז הדטרמיננטה של מטריצת יעקובי נקראת **יעקוביאן**, ומסומנת:

$$\mathrm{J}f(x_0)$$

או:

$$\frac{\partial(f_1, \cdots, f_n)(x_0)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)}$$

משפט (כלל השרשרת)

יהיו $E \subseteq \mathbb{R}^n, N \subseteq \mathbb{R}^m$ פתוחות.

תהי $g: E \to N$ דיפרנציאבילית ב - $x_0 \in E$.

תהי $f: N \to \mathbb{R}^k$ דיפרנציאבילית ב - $y_0 = g(x_0) \in N$.

אז:

$$F(x) \quad = \quad f\big(g(x)\big)$$

דיפרנציאבילית ב - x_0 ומתקיים:

$$F'(x_0) \quad = \quad f'(y_0)\big(g'(x_0)\big)$$

הערה

תהי $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ העתקה לינארית.

הנורמה של A היא המספר:

$$\|A\| \quad \coloneqq \quad \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|$$

לכל $x \in \mathbb{R}^n$, מתקיים:

$$\begin{aligned}\|A(x)\| &= \left\|A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\|\cdot\|x\| \\ &\le \|A\|\cdot\|x\|\end{aligned}$$

הוכחה (של המשפט)

נסמן:

$$\begin{aligned}A &:= f'(y_0) \\ B &:= g'(x_0)\end{aligned}$$

f דיפרנציאבילית ב - y_0, לכן:

$$f(y_0+\eta) = f(y_0)+A(\eta)+\alpha(\eta)\|\eta\|$$

כאשר:

$$\lim_{\eta\to 0}\alpha(\eta) = 0$$

ניקח:

$$\eta(h) = g(x_0+h)-g(x_0)$$

ונקבל:

$$F(x_0+h)-F(x_0) = A\big(\eta(h)\big)+\alpha\big(\eta(h)\big)\|\eta(h)\|$$

g דיפרנציאבילית ב - x_0, לכן:

$$\eta(h) = B(h)+\beta(h)\|h\|$$

כאשר:

$$\lim_{h\to 0}\beta(h) = 0$$

לכן:

$$F(x_0+h)-F(x_0) = A\big(B(h)\big)+r(h)$$

כאשר:

$$r(h) = A(\beta(h)\|h\|)+\alpha\big(\eta(h)\big)\|\eta(h)\|$$

נוכיח כי:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|r(h)\|}{\|h\|} = 0$$

נסמן:

$$r_1(h) \coloneqq A(\beta(h)\|h\|)$$

$$r_2(h) \coloneqq \alpha\big(\eta(h)\big)\|\eta(h)\|$$

מתקיים:

$$\begin{aligned}\|A(\beta(h)\|h\|)\| &= \|h\|\big\|A\big(\beta(h)\big)\big\| \\ &\le \|h\|\|A\|\|\beta(h)\|\end{aligned}$$

לכן:

$$0 \le \frac{\|r_1(h)\|}{\|h\|} \le \|A\|\|\beta(h)\|$$

מתקיים:

$$\lim_{h\to 0}\beta(h) = 0$$

לכן, עפ"י משפט הסנדוויץ':

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|r_1(h)\|}{\|h\|} = 0$$

מתקיים:

$$\begin{aligned}\|\eta(h)\| &\le \|B(h)\| + \|h\|\|\beta(h)\| \\ &\le (\|B\| + \|\beta(h)\|)\cdot\|h\|\end{aligned}$$

לכן:

$$\begin{aligned}\|r_2(h)\| &= \|\eta(h)\|\big\|\alpha\big(\eta(h)\big)\big\| \\ &\le \big\|\alpha\big(\eta(h)\big)\big\|\cdot(\|B\| + \|\beta(h)\|)\cdot\|h\|\end{aligned}$$

לכן:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|r_2(h)\|}{\|h\|} = 0$$

לכן:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|r(h)\|}{\|h\|} \quad = \quad 0$$

■