פתרון בוחן 2 אינפי 1 תיכוניסטים

1.

a. (**18 נק'**) תהיינה f,g רציפות על כל הממשיים. **הוכח** כי אם $\forall x\in\mathbb{Q}: f(x)=g(x)$, אזי $f=g$.

b. (**18 נק'**) תהי f רציפה על כל הממשיים המקיימת $\forall x,y\in\mathbb{R}: f(x+y)=f(x)f(y)$. נסמן $f(1)=a$, **מצא** את $f(x)$.

פתרון:

a.

תהי $x_0\in\mathbb{R}$. אם $x_0\in\mathbb{Q}$, אזי לפי הנתון $f(x_0)=g(x_0)$. לכן נניח כי $x_0\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

f רציפה על הממשיים, ולכן $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.
g רציפה על הממשיים, ולכן $\lim_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)$.

ניקח סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ של מספרים רציונאליים השואפת ל-x_0 אך שונה ממנו (קיום סדרה כזו נובע מצפיפות המספרים הרציונאליים במספרים הממשיים).

לפי היינה, נקבל כי $\lim_{x\to x_0}f(x_n)=f(x_0)$ וכן $\lim_{x\to x_0}g(x_n)=g(x_0)$. אבל בעצם, לכל $n\in\mathbb{N}$ נשים לב כי $f(x_n)=g(x_n)$ כי $x_n\in\mathbb{Q}$. לפי יחידות גבול של סדרה, נקבל כי $f(x_0)=g(x_0)$.

כלומר, בסה"כ קיבלנו כי $f=g$.

b.

נניח כי קיימות $f(x),g(x)$ המקיימת את כל התנאים. נוכיח כי $f(x)=g(x)=a^x$. נשים לב כי $a=f(1)=f(0+1)=f(0)f(1)=af(0)$, ולכן $f(0)=1$.

נוכיח כי לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $f\left(\frac{1}{n}\right)=g\left(\frac{1}{n}\right)=\sqrt[n]{a}$. נוכיח בה"כ עבור f. נשים לב כי מתקיים

$$a=f(1)=f\Bigg(\underbrace{\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{n\text{ מחוברים}}\Bigg)=\underbrace{f\left(\frac{1}{n}\right)f\left(\frac{1}{n}\right)\dots f\left(\frac{1}{n}\right)}_{n\text{ גורמים}}=\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$$

, ולכן $f\left(\frac{1}{n}\right)=\sqrt[n]{a}$. לכן $f\left(\frac{1}{n}\right)=g\left(\frac{1}{n}\right)=\sqrt[n]{a}$.

נוכיח שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $f\left(-\frac{1}{n}\right)=g\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{\sqrt[n]{a}}$. נוכיח בה"כ עבור f. נשים לב שמתקיים $1=f(0)=f\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right)=f\left(-\frac{1}{n}\right)f\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(-\frac{1}{n}\right)\sqrt[n]{a}$, ולכן $f\left(-\frac{1}{n}\right)=g\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{\sqrt[n]{a}}$.

לכן לכל $n\in\mathbb{Z},n\neq 0$ מתקיים $f\left(\frac{1}{n}\right)=g\left(\frac{1}{n}\right)=a^{\frac{1}{n}}$.

כעת נוכיח שלכל $r\in\mathbb{Q}$ מתקיים $f(r)=g(r)=a^r$. נוכיח בה"כ עבור f. יהי $r\in\mathbb{Q}$, לכן קיימים $m\in\mathbb{N},n\in\mathbb{Z},n\neq 0$ שעבורם מתקיים

$$f(r)=f\left(\frac{m}{n}\right)=f\Bigg(\underbrace{\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{m\text{ מחוברים}}\Bigg)=\underbrace{f\left(\frac{1}{n}\right)f\left(\frac{1}{n}\right)\dots f\left(\frac{1}{n}\right)}_{m\text{ גורמים}}=\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^m=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m=a^{\frac{m}{n}}=a^r.$$

הוכחנו למעשה שלכל $r\in\mathbb{Q}$ מתקיים $f(r)=g(r)=a^r$, ולכן לפי סעיף א' $f=g$ ולכן רק הפונקציה $f(x)=a^x$ מתאים לפתרון.

2. **קבע והוכח** האם הפונקציות הבאות רציפות במ"ש בתחומים הבאים:

a. **(12 נק')** $h_1(x) = tg\left(\frac{2}{1+x^4}\right)$ בקטע $(-\infty, \infty)$.

b. **(12 נק')** $h_2(x) = \max\{\sin(x), \cos^2(x)\}$ בקטע $(-\infty, \infty)$.

c. **(12 נק')** $h_3(x) = \sqrt[5]{x}$ בקטע $(-\infty, \infty)$.

פתרון:

a.

ניקח $x = \sqrt[4]{\frac{4-\pi}{\pi}}$, כלומר $x^4 = \frac{4-\pi}{\pi}$, ולכן $\frac{2}{1+x^4} = \frac{2}{1+\frac{4-\pi}{\pi}} = \frac{2}{\frac{4}{\pi}} = \frac{\pi}{2}$, ובנקודה זו tg אינו מוגדר.

b.

נשים לב כי $\max\{f, g\} = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2}$, ולכן $h_2(x) = \frac{\sin(x)+\cos^2(x)}{2} + \frac{|\sin(x)-\cos^2(x)|}{2}$.

$\sin(x)$ היא פונקציה רציפה ומחזורית, ולכן היא גם רציפה במ"ש.

$\cos^2(x)$ גם היא פונקציה רציפה ומחזורית, ולכן היא גם רציפה במ"ש.

$|x|$ היא פונקציה רציפה. נוכיח רציפות במ"ש לפי ההגדרה.
יהי $\varepsilon > 0$. נחפש $\delta > 0$ כך שלכל $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ שעבורם $|x_1 - x_2| < \varepsilon$ מתקיים $|f(x_1) - f(x_2)| <$ ε. אבל מתקיים $|f(x_1) - f(x_2)| = \left||x_1| - |x_2|\right| \le |x_1 - x_2| < \delta$ (הצעד לפני האחרון הוא לפי אי שוויון המשולש המורחב).
לכן אם נבחר $\delta = \varepsilon$ נקבל ש-$|x|$ רציפה במ"ש.

בסה"כ קיבלנו שהפונקציה $h_2(x)$ היא הרכבה וחיבור של פונקציות רציפות במ"ש, ולכן לפי משפט גם היא רציפה במ"ש.

c.

נחלק את $h_3(x)$ לקטעים.

בקטע $[1, \infty)$ נשים לב כי $h_3'(x) = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}} \le \frac{1}{5}$, כלומר הנגזרת חסומה ולפי משפט $h_3(x)$ רציפה שם במ"ש.

בקטע $(-\infty, -1]$ נשים לב כי $h_3'(x) = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}} \le \frac{1}{5}$, כלומר הנגזרת חסומה ולפי משפט $h_3(x)$ רציפה שם במ"ש.

בקטע $[-1,1]$ הפונקציה רציפה, ולכן לפי משפט קנטור רציפה שם במ"ש.

לכן, לפי משפט $h_3(x)$ רציפה במ"ש בקטע $(-\infty, \infty)$.

3. **מצא ומיין** את נקודות אי-הרציפות של הפונקציות הבאות:

a. **(12 נק')** $g_1(x) = f'(x)$ כאשר $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$.

b. **(12 נק')** $g_2(x) = (2D(x) - 1)^2$ כאשר $D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.

c. **(12 נק')** $g_3(x) = \frac{\sin(x)}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$.

פתרון:

a.

נגזור את f. עבור $x \neq 0$, נקבל כי
$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, כלומר ל-$g_1(x)$ אין אי-רציפות שאינה שונה מאפס כי סינוס, קוסינוס ופונקציית הזהות רציפות.

נחשב את הנגזרת עבור $x = 0$ לפי ההגדרה. ידוע כי בגבול אין התייחסות לנקודה עצמה, ולכן $f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ (החישוב האחרון הוא אפסה כפול חסומה).

נראה כי $x = 0$ היא נקודת אי רציפות ממין שני. ניקח $x_n = \frac{1}{2\pi n}$, $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$. $x_n, y_n \longrightarrow 0$. אבל:

$$g_1(x_n) = 2 \cdot \frac{1}{2\pi n} \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{2\pi n}}\right) - \cos\left(\frac{1}{\frac{1}{2\pi n}}\right) = \frac{1}{\pi n}\sin(2\pi n) - \cos(2\pi n) = -1 \longrightarrow -1$$

$$g_1(y_n) = 2 \cdot \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}}\right) - \cos\left(\frac{1}{\frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}}\right) = \frac{1}{\pi n + \frac{\pi}{4}} \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) =$$
$$\frac{1}{\pi n + \frac{\pi}{4}} \longrightarrow 0$$

לכן מצאנו שתי סדרות שעבורן $x_n, y_n \longrightarrow 0$ אבל הן לא שואפות לאותו הגבול, ולכן $x = 0$ היא נקודת אי-רציפות ממין שני.

b.

נשים לב כי $g_2(x) = (2D(x) - 1)^2 = \begin{cases} (2 \cdot 1 - 1)^2 & x \in \mathbb{Q} \\ (2 \cdot 0 - 1)^2 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} = 1$, ולכן $g_2(x)$ רציפה בכל נקודה.

c.

פונקציית הסינוס רציפה, ולכן אי-רציפות יכולה להתקיים רק כאשר מכנה מתאפס, כלומר עבור $x = 0$ או $\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\pi k}$ עבור $k \in \mathbb{Z}$.

עבור $x = 0$, בכל סביבה שלו מצאנו נקודת אי-רציפות (כי $\lim_{k \to \infty} \frac{1}{\pi k} = 0$), ולכן זוהי נקודת אי-רציפות ממין שני.

עבור $x = \frac{1}{\pi k}$, נשים לב כי $\lim_{x \to \frac{1}{\pi k}} \frac{\sin(x)}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{1}{\pi k}\right)}{0} = \infty$, ולכן קיים גבול חד-צדדי אינסופי ולכן זוהי נקודת אי-רציפות ממין שני.