פתרון מבחן מועד ב' – 83-112 חדו"א 1 להנדסה – 12/08/21

מרצה: דר' ארז שיינר משך המבחן: שלוש שעות חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משקל כל שאלה: 20 נק' ענו על כל השאלות כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin(e^{-x}-1))}{xe^{-x}}$ ב. $\lim_{x\to 1}\frac{x^8-1}{x-1}$ ג. $\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2}{(n^2)!}$

א. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin(e^{-x}-1))}{xe^{-x}}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin(e^{-x}-1))}{xe^{-x}}=\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin(\sin(e^{-x}-1))}{\sin(e^{-x}-1)}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{\sin(e^{-x}-1)}{e^{-x}-1}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{e^{-x}-1}{-x}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{-1}{e^{-x}}}_{\to -1}=-1$$

ב. $\lim_{x\to 1}\frac{x^8-1}{x-1}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^8-1}{x-1}=\left\{\frac{0}{0},L'Hopital\right\}=\lim_{x\to 1}\frac{8x^7}{1}=8$$

ג. $\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2}{(n^2)!}$

נחשב ראשית את גבול המנה

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\left((n+1)!\right)^2}{((n+1)^2)!}\cdot\frac{(n^2)!}{(n!)^2}=\frac{(n+1)^2}{(n^2+1)(n^2+2)\cdots(n^2+2n)(n^2+2n+1)}\le\frac{1}{n^2+1}\to 0$$

כיוון שגבול המנה קטן מ1 לפי כלל המנה גבול הסדרה המקורית הוא אפס.

.2

א. חשבו את $\int\frac{(x-1)^2}{x^2+1}dx$.

$$\frac{(x-1)^2}{x^2+1}=\frac{x^2-2x+1}{x^2+1}=1-\frac{2x}{x^2+1}$$

ולכן

$$\int\frac{(x-1)^2}{x^2+1}dx=x-\ln(x^2+1)+C$$

ב. קבעו אם האינטגרל הבא מתכנס או לא $\int_1^\infty \left(1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)dx$.

נזכור כי

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$$

ולכן

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{1}{2}$$

כלומר האינטגרל שלנו חבר של האינטגרל המתכנס $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$, ולכן גם הוא מתכנס.

3. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $\ln(x^2+1)=x$, הוכיחו תשובתכם.

נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$h(x)=x-\ln(x^2+1)$$

$$h'(x)=1-\frac{2x}{x^2+1}=\frac{x^2-2x+1}{x^2+1}=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}\geq 0$$

ולכן הפונקציה $h$ תמיד עולה ויש לה לכל היותר חיתוך אחד עם ציר האיקס

כעת נציב $x=0$ ונראה כי

$$h(0)=0$$

ולכן יש בדיוק חיתוך אחד.

4. תהי פונקציה $f$ המקיימת $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=1$.

לכל אחד מן הגבולות הבאים, חשבו אותו או תנו שתי דוגמאות שונות ל$f(x)$ עם תוצאה שונה של הגבול.

א. $\lim_{x\to\infty} f(x)-x$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)-x=\lim_{x\to\infty} x^2\left(\frac{f(x)}{x^2}-\frac{1}{x}\right)=\{\infty\cdot(1-0)\}=\infty$$

ב. $\lim_{x\to\infty}\sqrt{f(x)}-x$

שתי הפונקציות הבאות מקיימות את תנאי השאלה ויניבו גבולות שונים (המשך הפתרון תרגיל לקוראים).

$$f(x)=x^2, f(x)=x^2+x$$

ג. $\lim_{x\to\infty}\sqrt{f(x)}-\sqrt{x}$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{f(x)}-\sqrt{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2f(x)}{x^2}}-\sqrt{\frac{x^2}{x}}=\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt{\frac{f(x)}{x^2}}-\sqrt{\frac{1}{x}}\right)=\left\{\infty(\sqrt{1}-\sqrt{0})\right\}=\infty$$

5. יהי קבוע $0<\alpha<1$ ותהי סדרה המקיימת $a_{n+1}=a_n+\alpha(1-a_n)$ לכל $n\in\mathbb{N}$, וכן $a_1=0$.
חשבו את גבול הסדרה, והוכיחו תשובתכם.

ראשית נוכיח באינדוקציה כי לכל $n$ מתקיים כי $a_n<1$

עבור $n=1$ מתקיים כי $a_1=0<1$

יהי $n$ עבורו $a_n<1$ אזי

$$a_{n+1}=a_n+\alpha(1-a_n)=\alpha+a_n(1-\alpha)\underbrace{<}_{\substack{a_n<1\\(1-\alpha)>0}}\alpha+(1-\alpha)=1$$

כעת לכל $n$ מתקיים כי

$$a_{n+1}-a_n=\alpha(1-a_n)>0$$

לכן הסדרה מונוטונית עולה.

יחד עם החישובים הקודים הסדרה חסומה מלעיל על ידי 1 ולכן מתכנסת לגבול סופי, נסמנו $a_n\to L$.

נשאיף את שני צידי נוסחאת הנסיגה

$$\lim a_{n+1}=\lim a_n+\alpha(1-a_n)$$

נקבל כי

$$L=L+\alpha(1-L)$$

ולכן $L=1$ וזה גבול הסדרה.

6.

א. חשבו את גבול הסדרה

$$a_n=\frac{\sum_{k=1}^{n}k\sin\left(\frac{2k}{n}\right)}{n^2}$$

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{k}{n}\cdot\sin\left(\frac{2k}{n}\right)$$

אלה סכומי רימן של הפונקציה הרציפה $xsin(2x)$ ולכן לפי משפט שלמדנו בכיתה

$$a_n \to \int_0^1 xsin(2x)dx = \begin{Bmatrix} f' = \sin(2x) & g = x \\ f = -\frac{1}{2}\cos(2x) & g' = 1 \end{Bmatrix} = \left[-\frac{1}{2}xcos(2x)\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \cos(2x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\cos(2) + \left[\frac{1}{4}\sin(2x)\right]_0^1 = -\frac{1}{2}\cos(2) + \frac{1}{4}\sin(2)$$

ב. חשבו את פולינום טיילור מסדר 4 סביב אפס של הפונקציה $f(x) = \int_0^x \left(\int_0^t e^{(u^2)}du\right) dt$,

והציגו קירוב ל$f(1)$ באמצעותו.

נעזר במשפט היסודי של החדוא – עבור פונקציות רציפות הנגזרת של פונקציית השטח היא הפונקציה עצמה כלומר

$$\left(\int_0^x g(t)dt\right)' = g(x)$$

ולכן בתרגיל שלנו

$$f'(x) = \int_0^x e^{(u^2)}du$$

$$f''(x) = e^{(x^2)}$$

$$f'''(x) = 2xe^{(x^2)}$$

$$f^{(4)}(x) = 2e^{(x^2)} + 2x2xe^{(x^2)}$$

ולכן פולינום טיילור הוא

$$P_4(f,0)(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4$$

ולכן

$$f(1) \approx P_4(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$$