פתרון הבוחן גיאומטריה תשע"ז

1. (א) דננסה להבין מהי הצורה הגיאומטרית אותה מתארת העקומה, ומהי הצורה הקנונית שלה.
אם כן, את העקומה שלנו אפשר להציג כך:

$$xy - 1 = 0$$

כלומר:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 1 = 0$$

נלכסן את המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ אורתוגונאלית. נמצא את הערכים העצמיים:

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{4} \Longrightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2}$$

נמצא את הוקטורים העצמיים המתאימים:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$$

נקבל מכאן $u^1 = u^2$. אנו רוצים וקטור אורתונורמלי ולכן נבחר: $u = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. באופן דומה:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$$

נקבל מכאן $u^1 = -u^2$. אנו רוצים וקטור אורתונורמלי ולכן נבחר: $u = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. לכן:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ואם נציב $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, נקבל:

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 1 = 0$$

כלומר:

$$\frac{(x')^2}{2}-\frac{(y')^2}{2}=1$$

וזו היפרבולה.

(ב) המטריצה שלנו היא: $A=\begin{pmatrix}9&6&3\\6&5&0\\3&0&5\end{pmatrix}$. נמצא את הע"ע:

$$0=\begin{vmatrix}\lambda-9&-6&-3\\-6&\lambda-5&0\\-3&0&\lambda-5\end{vmatrix}=-3\left(3\left(\lambda-5\right)\right)+\left(\lambda-5\right)\left(\left(\lambda-5\right)\left(\lambda-9\right)-36\right)=$$

$$=\left(\lambda-5\right)\left(\lambda^2-14\lambda+45-36-9\right)=\lambda\left(\lambda-5\right)\left(\lambda-14\right)$$

לכן הע"ע הם $\lambda=0,5,14$.
נמצא וקטורים עצמיים מתאימים. עבור $\lambda=0$:

$$\begin{pmatrix}9&6&3\\6&5&0\\3&0&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

כלומר:

$$\begin{cases}9x+6y+3z=0\\6x+5y=0\\3x+5z=0\end{cases}$$

מהמשוואות השנייה והשלישית נקבל: $z=-\frac{3}{5}x, y=-\frac{6}{5}x$. לכן אפשר לבחור:

$$\begin{pmatrix}5\\-6\\-3\end{pmatrix}$$

ננרמל ונקבל: $\frac{1}{\sqrt{70}}\begin{pmatrix}5\\-6\\-3\end{pmatrix}$. עבור $\lambda=5$:

$$\begin{cases}9x+6y+3z=5x\\6x+5y=5y\\3x+5z=5z\end{cases}$$

נקבל ש: $x=0$, ואם נציב זאת במשוואה הראשונה נקבל: $z=-2y$, ולכן אפשר לבחור:

$$\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$$

ננרמל ונקבל: $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. עבור $\lambda = 14$:

$$\begin{cases} 9x+6y+3z=14x \\ 6x+5y=14y \\ 3x+5z=14z \end{cases}$$

מהמשוואות השנייה והשלישית נקבל: $z=\frac{1}{3}x, y=\frac{2}{3}x$, ולכן אפשר לבחור:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ננרמל ונקבל: $\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

אם כך, המטריצה המלכסנת P והאלכסונית D הן:

$$D=\begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P=\begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{14}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{70}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{6}{\sqrt{70}} \\ \frac{1}{\sqrt{14}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{3}{\sqrt{70}} \end{pmatrix}$$

התבנית שלנו היא:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & -6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=2$$

נציב $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ ונקבל:

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & -6 & -3 \end{pmatrix}P\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=2$$

נשים לב שמתקיים:

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 & -3 \end{pmatrix}P\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{70}{\sqrt{70}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=-\sqrt{70}z'$$

ולכן בקואורדינטות החדשות נקבל:

$$14\left(x'\right)^2+5\left(y'\right)^2-\sqrt{70}z'-2=0$$

נעביר אגף ונקבל:

$$14\left(x'\right)^2+5\left(y'\right)^2=\sqrt{70}\left(z'+\frac{2}{\sqrt{70}}\right)$$

נסמן: $z''=z'+\frac{2}{\sqrt{70}}$, נחלק ב־$\sqrt{70}$ ונקבל:

$$\frac{14\left(x'\right)^2}{\sqrt{70}}+\frac{5\left(y'\right)^2}{\sqrt{70}}=z''$$

וזהו פרבולואיד אליפטי.

2. נשתמש בנוסחה ל־s וננסה להפוך את הפונקציה שנקבל.

(א) וקטור הנגזרות הוא:

$$\alpha'\left(t\right)=\left(-2\sin t,2\cos t\right)$$

ולכן:

$$s\left(t\right)=\int\limits_0^t\left\|\alpha'\left(x\right)\right\|dx=\int\limits_0^t\sqrt{4\sin^2x+4\cos^2x}dx=\int\limits_0^t 2dx=2t$$

לכן, הפרמטר יהיה $t=\frac{s}{2}$, והפרמטריזציה במהירות יחידה תהיה:

$$\alpha\left(s\right)=\left(1+2\cos\frac{s}{2},-3+2\sin\frac{s}{2}\right)$$

כעת, וקטור הנגזרות השניות הוא: $\alpha''\left(s\right)=\left(-\frac{1}{2}\cos\frac{s}{2},-\frac{1}{2}\sin\frac{s}{2}\right)$ ולכן העקמומיות היא:

$$k=\left\|\alpha''\left(s\right)\right\|=\frac{1}{2}$$

(ב) וקטור הנגזרות הוא:

$$\alpha'\left(t\right)=\left(1,\sinh\frac{t}{a}\right)$$

ולכן:

$$s\left(t\right)=\int\limits_0^t\left\|\alpha'\left(x\right)\right\|dx=\int\limits_0^t\sqrt{1+\sinh^2\frac{x}{a}}dx=\int\limits_0^t\cosh\frac{x}{a}dx=a\sinh\frac{t}{a}$$

לפי הזהות $1+\sinh^2t=\cosh^2t$.
נחלץ את t ונקבל: $t\left(s\right)=a\cdot arcsinh\frac{s}{a}$. אם נציב זאת ב־$\alpha\left(t\right)$, נקבל פרמטריזציה במהירות יחידה.
כאן הפרמטריזציה במהירות יחידה מעט מסובכת (לא יותר מדי), אז אפשר להשתמש בנוסחה הכללית:

$$k\left(t\right)=\frac{\left|\begin{matrix}1 & 0\\ \sinh\frac{t}{a} & \frac{1}{a}\cosh\frac{t}{a}\end{matrix}\right|}{\cosh^3\frac{t}{a}}=\frac{1}{a\cosh^2\frac{t}{a}}$$

3. (א) נשתמש בנוסחת בייטמן. הפונקציה F היא: $F(x,y)=y-x^2=0$. כעת:

$$F_x=-2x, F_y=1$$

$$F_{xx}=-2, F_{xy}=0, F_{yy}=0$$

ולכן:

$$|k|=\frac{\left|F_{xx}F_y^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x^2\right|}{\left(\sqrt{F_x^2+F_y^2}\right)^3}=\frac{|-2|}{\left(\sqrt{4x^2+1}\right)^3}=\frac{2}{\left(4x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

וקל לראות שהעקמומיות המקסימלית מתקבלת כאשר $x=0$ (למתקדמים: גזרו והשוו לאפס), וערכה הוא 2.

(ב) הפונקציה F היא: $F(x,y)=xy-1=0$. כעת:

$$F_x=y, F_y=x$$

$$F_{xx}=F_{yy}=0, F_{xy}=1$$

ולכן:

$$k=\frac{|-2xy|}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2x^3}{\left(x^4+1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

מכיוון שעל העקומה $y=\frac{1}{x}$ ו־x חיובי. אם גוזרים ומשווים ל־0 רואים שהמקסימום מתקבל כאשר $x=1$, כלומר בנקודה $(1,1)$.

(ג) הפונקציה F היא: $F(x,y)=3x^2+4y^2-1=0$. כעת:

$$F_x=6x, F_y=8y$$

$$F_{xx}=6, F_{yy}=8, F_{xy}=0$$

ולכן:

$$k=\frac{\left|6\cdot 64y^2+8\cdot 36x^2\right|}{\left(64y^2+36x^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{8\cdot 12\cdot\left(4y^2+3x^2\right)}{\left(16y^2+12\cdot\left(4y^2+3x^2\right)\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{96}{\left(16y^2+12\right)^{\frac{3}{2}}}$$

והמקסימום מתקבל כאשר $y=0$, כלומר בנקודות $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},0\right),\left(\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)$ (זה הגיוני מכיוון שהעיקול באליפסה "הכי חד" בדיוק בחיתוך עם ציר ה־x).

4. (א) לפי שאלות $3,2$ בתרגיל 4 אפשר לבחור את העקומה:

$$\alpha(s)=\left(\int_0^s\cos\left(\frac{u^3}{3}+u\right)du, \int_0^s\sin\left(\frac{u^3}{3}+u\right)du\right)$$

(ב) מתקיים: $\delta_b^a g_{ca}=g_{cb}$, וגם: $g^{bd}\delta_d^c=g^{bc}$, ולכן:

$$\delta_b^a g_{ca}g^{bd}\delta_d^c=g^{bc}g_{cb}=\delta_b^b=n$$