גיאומטריה אנליטית ודיפרנציאלית - שבוע 4

16 באוגוסט 2015

מקדמי כריסטופל:

$$\Gamma_{ij}^{k}=\frac{1}{2}g^{km}\left(g_{mi,j}+g_{mj,i}-g_{ij,m}\right)$$

כאשר:

*הסכום רץ על $m=1,2$.

*g^{ab} הם איברי המטריצה G^{-1}.

*$g_{ab,c}$ פירושו לגזור את האיבר g_{ab} לפי המשתנה ה$-c$.

*$1\leq i,j,k\leq 2$ כך שיש לנו 8 מקדמי כריסטופל בסך הכל.

המשוואות הגיאודזיות הן:

$$\begin{cases}(\gamma^{1})''+\Gamma_{ij}^{1}(\gamma^{1})'(\gamma^{2})'=0\\(\gamma^{2})''+\Gamma_{ij}^{2}(\gamma^{1})'(\gamma^{2})'=0\end{cases}$$

כאשר $\gamma(t)=(\gamma^{1}(t),\gamma^{2}(t))$.

<u>תרגיל:</u>

יהיו M_1,M_2 שני משטחים עם מטריקות G_1,G_2 בהתאמה.

נתון שמקדמי כריסטופל של המשטחים זהים. האם $G_1=G_2$?

<ins>פתרון:</ins>

לא בהכרח. אם נתבונן במטריקות:

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, G_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

נקבל כמובן את אותם מקדמי כריסטופל, אך המטריקות שונות.

<ins>תרגיל:</ins>

תהי $x = \sqrt{4 - z^2}$ עקומה במישור xz.

מצאו פרמטריזציה של משטח הסיבוב M סביב ציר ה$-z$.

חשבו את העקמומיות הראשיות, את מקדמי כריסטופל ואת המשוואות הגיאודזיות.

<ins>פתרון:</ins>

אם נעלה בריבוע ונעביר אגפים, נקבל את המעגל:

$$x^2 + z^2 = 4$$

אנו רוצים רק את x החיובי ולכן מדובר על חצי מעגל עם רדיוס 2.

פרמטריזציה של המעגל היא, למשל:

$$\gamma(t) = (2\sin t, 0, 2\cos t)\,, t \in [0, \pi]$$

ולכן משטח הסיבוב שלנו הוא:

$$r(t,\theta) = R_\theta \cdot \gamma(t) = (2\sin t\cos\theta, 2\sin t\sin\theta, 2\cos t)$$

קצת עבודה שחורה. וקטורי הנגזרות הם:

$$r_t = (2\cos t\cos\theta, 2\cos t\sin\theta, -2\sin t), r_\theta = (-2\sin t\sin\theta, 2\sin t\cos\theta, 0)$$

נחשב את מקדמי המטריקה:

$$g_{11} = \langle r_t, r_t \rangle = 4\cos^2 t \cos^2\theta + 4\cos^2 t \sin^2\theta + 4\sin^2 t = 4$$
$$g_{12} = g_{21} = \langle r_t, r_\theta \rangle = 0$$
$$g_{22} = \langle r_\theta, r_\theta \rangle = 4\sin^2 t \sin^2\theta + 4\sin^2 t \cos^2\theta = 4\sin^2 t$$

ולכן:

$$G = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4\sin^2 t \end{pmatrix}$$

נחשב את איברי המטריצה B. וקטורי הנגזרות השניות:

$$r_{tt} = (-2\sin t\cos\theta, -2\sin t\sin\theta, -2\cos t)$$
$$r_{t\theta} = r_{\theta t} = (-2\cos t\sin\theta, 2\cos t\cos\theta, 0)$$
$$r_{\theta\theta} = (-2\sin t\cos\theta, -2\sin t\sin\theta, 0)$$

נחשב את הנורמל. המכפלה הוקטורית היא:

$$r_t \times r_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2\cos t\cos\theta & 2\cos t\sin\theta & -2\sin t \\ -2\sin t\sin\theta & 2\sin t\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (4\sin^2 t\cos\theta, 4\sin^2 t\sin\theta, 4\cos t\sin t)$$

אם כן:

$$\|r_t \times r_\theta\| = \sqrt{16\sin^4 t\cos^2\theta + 16\sin^4 t\sin^2\theta + 16\cos^2 t\sin^2 t} = 4\sin t$$

ולכן:

$$\vec{n} = \frac{r_t \times r_\theta}{\|r_t \times r_\theta\|} = (\sin t\cos\theta, \sin t\sin\theta, \cos t)$$

כעת:

$$b_{11} = r_{tt} \cdot \vec{n} = -2\sin^2 t\cos^2\theta - 2\sin^2 t\sin^2\theta - 2\cos^2 t = -2$$

$$b_{21} = b_{12} = r_{t\theta} \cdot \vec{n} = 0$$

$$b_{22} = r_{\theta\theta} \cdot \vec{n} = -2\sin^2 t\cos^2\theta - 2\sin^2 t\sin^2\theta = -2\sin^2 t$$

ולכן:

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2\sin^2 t \end{pmatrix}$$

כעת, נחשב את אופרטור הצורה:

$$S = G^{-1}B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4\sin^2 t \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2\sin^2 t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

לכן, העקמומיות הראשיות הן $k_1 = k_2 = -\frac{1}{2}$. לכן, כל נקודה במשטח שלנו היא אמבילית, כמו שראינו בשבוע שעבר.

נחשב את מקדמי כריסטופל; אנו צריכים את:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4\sin^2 t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 8\cos t\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11,1} & g_{12,1} \\ g_{21,1} & g_{22,1} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11,2} & g_{12,2} \\ g_{21,2} & g_{22,2} \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$\Gamma_{11}^{1} = \frac{1}{2}g^{11}\left(g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1}\right) + \frac{1}{2}g^{12}\left(g_{21,1} + g_{21,1} - g_{11,2}\right) = 0$$

$$\Gamma^1_{12}=\Gamma^1_{21}=\frac{1}{2}g^{11}\left(g_{12,1}+g_{11,2}-g_{12,1}\right)+\frac{1}{2}g^{12}\left(g_{22,1}+g_{21,2}-g_{12,2}\right)=\cot t$$

$$\Gamma^1_{22}=\frac{1}{2}g^{11}\left(g_{12,2}+g_{12,2}-g_{22,1}\right)+\frac{1}{2}g^{12}\left(g_{22,2}+g_{22,2}-g_{22,2}\right)=0$$

$$\Gamma^2_{11}=\frac{1}{2}g^{21}\left(g_{11,1}+g_{11,1}-g_{11,1}\right)+\frac{1}{2}g^{22}\left(g_{21,1}+g_{21,1}-g_{11,2}\right)=-\sin t\cos t$$

$$\Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=\frac{1}{2}g^{21}\left(g_{12,1}+g_{11,2}-g_{12,1}\right)+\frac{1}{2}g^{22}\left(g_{22,1}+g_{21,2}-g_{12,2}\right)=0$$

$$\Gamma^2_{22}=\frac{1}{2}g^{22}\left(g_{12,2}+g_{12,2}-g_{22,1}\right)+\frac{1}{2}g^{22}\left(g_{22,2}+g_{22,2}-g_{22,2}\right)=0$$

ולכן המשוואות הגיאודזיות הן:

$$\begin{cases} t''+2\cot t\cdot t'\theta'=0 \\ \theta''+-\sin t\cos t\cdot t'(\theta')^2=0 \end{cases}$$

<u>תרגיל (מבחן תשע"ג סמסטר ב' מועד א'):</u>

נתון ההיפרבולואיד $(\cosh v\cos\theta,\cosh v\sin\theta,\sinh v)$.

חשבו את התבנית היסודית הראשונה ואת מקדמי כריסטופל.

הוכיחו שהמעגל $x^2+y^2=1$ במישור $z=0$ הוא קו גיאודזי על פני ההיפרבולואיד.

<u>פתרון:</u>

וקטורי הנגזרות הם:

$$r_v=(\sinh v\cos\theta,\sinh v\sin\theta,\cosh v),r_\theta=(-\cosh v\sin\theta,\cosh v\cos\theta,0)$$

מקדמי המטריקה הם:

$$g_{11}=\langle r_v,r_v\rangle=\sinh^2 v\cos^2\theta+\sinh^2 v\sin^2\theta+\cosh^2 v=\cosh 2v$$
$$g_{12}=g_{21}=\langle r_v,r_\theta\rangle=0$$
$$g_{22}=\langle r_\theta,r_\theta\rangle=\cosh^2 v\sin^2\theta+\cosh^2 v\cos^2\theta=\cosh^2 v$$

ולכן המטריקה היא:

$$G=\begin{pmatrix}\cosh 2v & 0\\ 0 & \cosh^2 v\end{pmatrix}$$

נחשב את מקדמי כריסטופל.

אנחנו צריכים את:

$$G^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\cosh 2v} & 0\\ 0 & \frac{1}{\cosh^2 v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}g^{11} & g^{12}\\ g^{21} & g^{22}\end{pmatrix}$$
$$\frac{\partial G}{\partial v}=\begin{pmatrix}2\sinh 2v & 0\\ 0 & \sinh 2v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}g_{11,1} & g_{12,1}\\ g_{21,1} & g_{22,1}\end{pmatrix}$$
$$\frac{\partial G}{\partial \theta}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}g_{11,2} & g_{12,2}\\ g_{21,2} & g_{22,2}\end{pmatrix}$$

ולכן:

$$\Gamma^1_{11}=\frac{1}{2}g^{11}\left(g_{11,1}+g_{11,1}-g_{11,1}\right)+\frac{1}{2}g^{12}\left(g_{21,1}+g_{21,1}-g_{11,2}\right)=\tanh 2v$$

$$\Gamma^1_{12}=\Gamma^1_{21}=\frac{1}{2}g^{11}\left(g_{12,1}+g_{11,2}-g_{12,1}\right)+\frac{1}{2}g^{12}\left(g_{22,1}+g_{21,2}-g_{12,2}\right)=0$$

$$\Gamma^1_{22}=\frac{1}{2}g^{11}\left(g_{12,2}+g_{12,2}-g_{22,1}\right)+\frac{1}{2}g^{12}\left(g_{22,2}+g_{22,2}-g_{22,2}\right)=-\frac{1}{2}\tanh 2v$$

$$\Gamma_{11}^2=\frac{1}{2}g^{21}\left(g_{11,1}+g_{11,1}-g_{11,1}\right)+\frac{1}{2}g^{22}\left(g_{21,1}+g_{21,1}-g_{11,2}\right)=0$$

$$\Gamma_{12}^2=\Gamma_{21}^2=\frac{1}{2}g^{21}\left(g_{12,1}+g_{11,2}-g_{12,1}\right)+\frac{1}{2}g^{22}\left(g_{22,1}+g_{21,2}-g_{12,2}\right)=\tanh v$$

$$\Gamma_{22}^2=\frac{1}{2}g^{22}\left(g_{12,2}+g_{12,2}-g_{22,1}\right)+\frac{1}{2}g^{22}\left(g_{22,2}+g_{22,2}-g_{22,2}\right)=-\tanh v$$

המשוואות הגיאודזיות שלנו הן:

$$\begin{cases} (v)''+\Gamma_{ij}^1(v)'(\theta)'=0 \\ (\theta)''+\Gamma_{ij}^2(v)'(\theta)'=0 \end{cases}$$

המעגל נמצא על מישור $z=0$ ורדיוסו 1, ולכן:

$$(\cosh v\cos\theta,\cosh v\sin\theta,\sinh v)=(x,y,0)$$

לכן $v=0$, והמעגל שלנו הוא:

$$\beta(s)=(\cos\theta(s),\sin\theta(s),0)$$

כעת, אנו יודעים שהקו הגיאודזי הוא בפרמטריזציה במהירות יחידה, כלומר:

$$1=\|\beta'(s)\|=\|(-\theta'\sin\theta,\theta\cos\theta,0)\|=|\theta'|$$

גזרנו לפי כלל השרשרת. אם כן, $\theta'=\pm1$ ולכן $\theta''=0$.

במצב הזה, בו $v=0$ ו-$\theta''=0$, אפשר לראות שהמשוואות הגיאודזיות אכן מתקיימות.

<u>תרגילון:</u>

תהי $\alpha:[a,b]\to S^2$ עקומה, אזי $\alpha\perp\alpha'$.

<u>פתרונון:</u>

מכיוון שהעקומה α נמצאת על הספירה, מתקיים:

$$\langle \alpha, \alpha \rangle = 1$$

נגזור ונקבל:

$$0 = \frac{d}{dt} \langle \alpha, \alpha \rangle = \langle \alpha, \alpha' \rangle + \langle \alpha', \alpha \rangle = 2 \langle \alpha, \alpha' \rangle$$

לכן $\langle \alpha, \alpha' \rangle = 0$ ולכן $\alpha \perp \alpha'$.

יחס קלרו $(Clairaut)$**:**

תהי $\alpha(t)$ פרמטריזציה של מעגל גדול על S^2.

נסמן ב$-r(t)$ את המרחק מ$-\alpha(t)$ לציר ה$-z$.

נסמן ב$-\gamma(t)$ את הזווית בין הוקטור המשיק לעקומה α, $\alpha'(t)$, לבין הוקטור המשיק לקו הרוחב העובר דרך הנקודה $\alpha(t)$.

אזי:

$$r(t)\cos(\gamma(t)) = r_{min}$$

כאשר r_{min} הוא המרחק המינימלי של α מציר ה$-z$.

<u>לדוגמה:</u>

נתבונן במשטח $S = \left\{x^2 + y^2 = 1\right\}$ ב$-\mathbb{R}^3$.

זהו גליל עם רדיוס 1.

נסמן ב$-\gamma_a$ את עקומת החיתוך של S עם המישור $\{z = a\}$.

עבור עקומה גיאודזית β, הזווית בין γ_a לבין β אינה תלויה ב$-a$.

איך זה נובע מיחס קלרו? אפשר להכליל את היחס למשטחי סיבוב, ובמקרה שלנו r הוא קבוע ולכן גם הזווית תהיה קבועה.

<u>תרגיל:</u>

הוכיחו את הזהויות הבאות:

א. $\langle r_{ij}, r_k \rangle = \Gamma_{ij}^s g_{sk}$ (סכום על s).

<u>פתרון:</u>

נזכור שמתקיים:

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^1 r_1 + \Gamma_{ij}^2 r_2 + b_{ij}\vec{n}$$

ולכן:

$$\langle r_{ij}, r_k \rangle = \left\langle \Gamma_{ij}^1 r_1 + \Gamma_{ij}^2 r_2 + b_{ij}\vec{n}, r_k \right\rangle = \Gamma_{ij}^1 \langle r_1, r_k \rangle + \Gamma_{ij}^2 \langle r_2, r_k \rangle + b_{ij} \langle \vec{n}, r_k \rangle =$$

הנורמל $\vec{n}$ מאונך לוקטור הנגזרות r_k ולכן:

$$= \Gamma_{ij}^1 \langle r_1, r_k \rangle + \Gamma_{ij}^2 \langle r_2, r_k \rangle = \Gamma_{ij}^1 g_{1k} + \Gamma_{ij}^2 g_{2k} = \Gamma_{ij}^s g_{sk}$$

ב. $g_{ij,k} = \langle r_{ik}, r_j \rangle + \langle r_i, r_{jk} \rangle$.

<u>פתרון:</u>

נגזור לפי כלל לייבניץ:

$$g_{ij,k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \frac{\partial}{\partial u^k} \langle r_i, r_j \rangle = \langle r_{ik}, r_j \rangle + \langle r_i, r_{jk} \rangle$$

נגזרת לפי u^k פירושה לגזור לפי המשתנה ה$k-$ כמובן.

ג. $\langle r_{ii}, r_i \rangle = \frac{1}{2} g_{ii,i}$.

<u>פתרון:</u>

בדיוק כמו סעיף ב'.

ד. $\vec{n}_j = -g^{ik} b_{kj} r_i$.

<u>פתרון:</u>

נתבונן באופרטור הצורה. מצד אחד,

$$S=-d_{\vec{n}}=-J_{\vec{n}}=\left(-\vec{n}_1,-\vec{n}_2\right)$$

ומצד שני:

$$S=G^{-1}B=\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} g^{11}b_{11}+g^{12}b_{21} & g^{11}b_{12}+g^{12}b_{22} \\ g^{21}b_{11}+g^{22}b_{21} & g^{21}b_{12}+g^{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

נזכור שהדיפרנציאל הוא איזומורפיזם בין המישור המשיק לבין $\mathbb{R}^2$, שמתאים בין וקטור במישור המשיק לבין וקטור הקואורדינטות שלו לפי הבסיס $\{r_1,r_2\}$.

לכן:

$$-\vec{n}_j=\left(g^{11}b_{1j}+g^{12}b_{2j}\right)r_1+\left(g^{21}b_{1j}+g^{22}b_{2j}\right)r_2=g^{ik}b_{kj}r_i$$

ואכן $\vec{n}_j=-g^{ik}b_{kj}r_i$.

משוואות גאוס־קודאצי:

משוואת גאוס היא:

$$R^n_{ijk}=g^{nm}\left(b_{ij}b_{mk}-b_{ik}b_{mj}\right)$$

כאשר R^n_{ijk} הוא טנזור העקמומיות של רימן:

$$R^n_{ijk}=\Gamma^n_{ij,k}-\Gamma^n_{ik,j}+\Gamma^m_{ij}\Gamma^n_{mk}-\Gamma^m_{ik}\Gamma^n_{mj}$$

משוואת קודאצי $(Codazzi)$ היא:

$$b_{km}\Gamma^k_{ij}-b_{kj}\Gamma^k_{im}=b_{im,j}-b_{ij,m}$$

משחקים נחמדים בין מקדמים חמודים, עכשיו לדבר האמיתי: המשפט המפתיע.

Theorema egregium:

כשגאוס כתב על המשפט לראשונה, הוא כינה אותו בלטינית $egregium$, ראוי לציון.

מהו המשפט ומה ראוי בו לציון?

המשפט המפתיע של גאוס אומר שעקמומיות גאוס היא אינוואריאנט פנימי, תכונה פנימית של המשטח.

כלומר, עקמומיות גאוס k תלויה במטריקה G של המשטח בלבד.

איך? אפשר להביע את k באמצעות הנוסחה הבאה:

$$k = \frac{1}{g_{11}} \left(\Gamma_{11,2}^{2} - \Gamma_{12,1}^{2} + \Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{2} + \Gamma_{11}^{1}\Gamma_{12}^{2} - \Gamma_{12}^{1}\Gamma_{11}^{2} - \left(\Gamma_{12}^{2}\right)^{2} \right)$$

ולכן k תלויה במטריקה בלבד, שהרי מקדמי כריסטופל תלויים במטריקה בלבד.

מעבר ליכולת לחשב את k בדרך נוספת, יש משמעות רבה לכך שעקמומיות היא תכונה פנימית ותלויה במטריקה בלבד.

למשל, אנו יודעים שמשטחים הם איזומטריים אם ורק אם יש פרמטריזציות שלהם בהן המטריקות של המשטחים זהות.

לכן, אם משטחים הם איזומטריים יש להם את אותה העקמומיות.

בפרט, למשטח יש את אותה העקמומיות בכל פרמטריזציה.

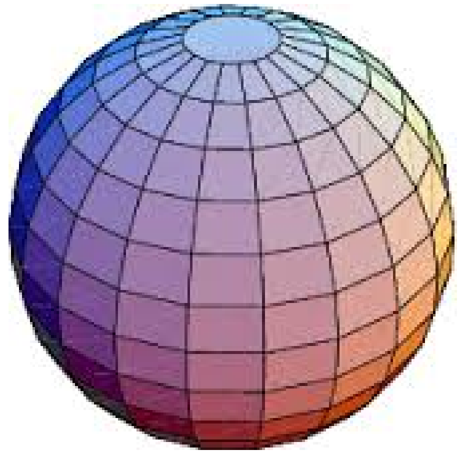
אפשר גם להסתכל בכיוון ההפוך; אם למשטחים יש עקמומיות שונות, אין פרמטריזציות שלהם בהן המטריקות שוות והם לא איזומטריים.

<u>תרגיל:</u>

נתבונן בשלושה משטחים - ספירה, גליל ואוכף ($z = x^2 - y^2$).

הראו שלא קיימות פרמטריזציות של המשטחים בהן המטריקות של כל זוג משטחים זהות.

<u>פתרון:</u>



פרמטריזציה של הספירה שלנו היא:

$$r(u,v) = (a\cos u \sin v, a\sin u \sin v, a\cos v)$$

כבר חישבנו מספיק מטריצות B, G עד עתה, במקרה שלנו הן:

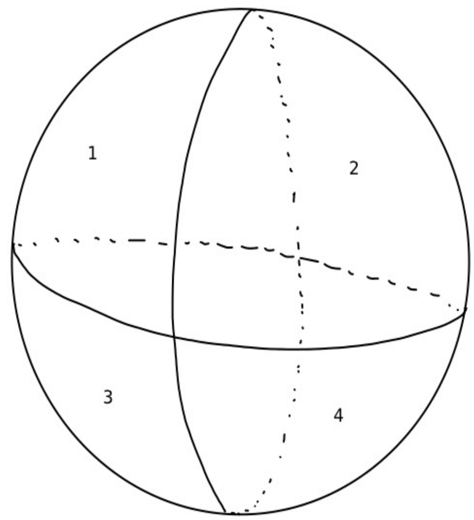
$$G = \begin{pmatrix} a^2\sin^2 v & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a\sin^2 v & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$k = \det S = \frac{\det B}{\det G} = \frac{1}{a^2}$$

נשים לב שהעקמומיות הראשיות הן $\frac{1}{a}$ (הן שוות וראינו שעל הספירה כל נקודה היא אכן אמבילית).

אינטואיטיבית, על הספירה אפשר להתקדם בשני כיוונים שונים, כל אחד מהם הוא על מעגל גדול. מהי העקמומיות של מעגל גדול? $\frac{1}{a}$.



פרמטריזציה של הגליל היא:

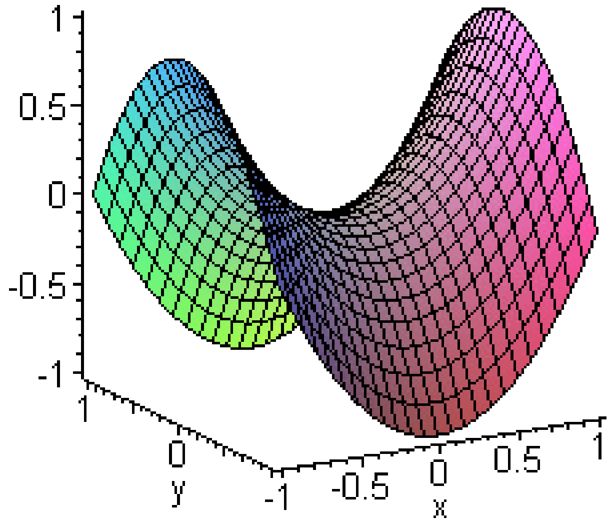
$$r(u,v) = (b\cos u, b\sin u, v)$$

ראינו שכל מקדמי כריסטופל במצב זה מתאפסים (ולכן הגיאודזים הם קווים ישרים).

לכן, אם נשתמש במשפט המפתיע, נקבל:

$$k = 0$$

האוכף שלנו הוא פרבולואיד היפרבולי:



זהו משטח ניתן להטלה על מישור xy, ופרמטריזציה שלו היא:

$$r(u,v)=(u,v,u^2-v^2)$$

התבניות היסודיות נתונות על ידי המטריצות:

$$G=\begin{pmatrix}1+4u^2 & -4uv\\ -4uv & 1+4v^2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}} & 0\\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}\end{pmatrix}$$

ולכן:

$$k=\det S=\frac{\det B}{\det G}=-\frac{4}{\left(1+4u^2+4v^2\right)^2}$$

שימו לב שזהו משטח שבו G אינה אלכסונית.

כעת, העקמומיות של הספירה תמיד חיובית, של הגליל תמיד אפס ושל האוכף תמיד שלילית, ולכן לפי מה שהסברנו אין פרמטריזציות של המשטחים האלו בהן המטריקות זהות.

שדות וקטוריים:

יהי M משטח רגולרי.

שדה וקטורי משיק לקבוצה $M \subseteq W$ הוא פונקציה $\upsilon : W \to \mathbb{R}^3$ כך שלכל $p \in W$, $\upsilon(p) \in T_p(M)$.

אגד המשיקים $(Tangent\ Bundle)$ הוא הקבוצה: $\bigcup_{p\in W} T_p(M) := T_W(M)$.

השדה υ ייקרא חלק אם הפונקציות a, b המוגדרות על ידי השיוויון:

$$\begin{cases} \upsilon(p) = a(u,v)r_1 + b(u,v)r_2 \\ p = r(u,v) \end{cases}$$

הן חלקות.

<u>לדוגמה:</u>

נתון המעגל $(x-2)^2 + z^2 = 1$ במישור xz.

פרמטריזציה של המעגל היא למשל:

$$\gamma(\theta) = (2+\cos\theta, 0, \sin\theta)$$

אם נסובב את המשטח סביב ציר ה$-z$, נקבל טורוס עם הפרמטריזציה הבאה:

$$r(\theta,\phi) = R_\phi \cdot \gamma(\theta) = ((2+\cos\theta)\cos\phi, (2+\cos\theta)\sin\phi, \sin\theta)$$

וקטור המשיק למעגל נתון על ידי:

$$\gamma'(\theta) = (-\sin\theta, 0, \cos\theta)$$

ואם נסובב את וקטור המשיק שלנו סביב ציר ה$-z$ נקבל שדה משיק:

$$\upsilon(\theta,\phi) = R_\phi \cdot \gamma'(\theta) = (-\sin\theta\cos\phi, -\sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$$

הבחינו בכך שאפשר לגזור את γ ואז לסובב או לסובב את γ ואז לגזור ולקבל את אותה התוצאה.

נראה שהשדה שלנו הוא אכן שדה משיק.

אנו דורשים $\upsilon(p) \in T_p(M)$ לכל $p = r(\theta, \phi)$.

המישור המשיק נפרש על ידי וקטורי הנגזרות r_θ, r_ϕ ולכן אנו מחפשים a, b עבורם:

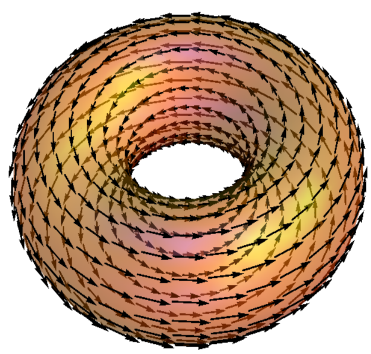
$$\upsilon(p(\theta, \phi)) = a(\theta, \phi) r_\theta + b(\theta, \phi) r_\phi$$

אבל קל לראות שמתקיים: $\upsilon(\theta, \phi) = r_\theta$, ולכן:

$$a = 1, b = 0$$

לכל נקודה p, ולכן υ אכן שדה משיק.

מכיוון שהפונקציות a, b חלקות (הן הרי קבועות) נקבל שהשדה υ הוא חלק.



גרדיאנט:

גרדיאנט הוא שדה וקטורי (המופעל על פונקציה סקלרית) המשייך לכל נדוקה וקטור המצביע אל הכיוון בו השינוי בפונקציה הסקלרית מקסימלי.

במרחב $\mathbb{R}^n$ מדובר בוקטור הנגזרות החלקיות; דשנו בנושא זה לא מעט בקורסים שעברו.

איך מכלילים זאת למשטח כלשהו?

הגרדיאנט $grad(f) = \nabla f$ של פונקציה $f : M \to \mathbb{R}$ כאשר M משטח מוגדר לכל $w \in T_p(M)$ כך:

$$df(w) = \langle \nabla f, w \rangle$$

כאשר df הוא הדיפרנציאל.

אם נסמן $w = w^i r_i, \nabla f = \nabla f^i r_i$ כאשר $\{r_i\}$בסיס למישור המשיק, מליניאריות המכפלה הפנימית נקבל:

$$\langle \nabla f, w \rangle = g_{ij} \nabla f^i w^j$$

כאשר $g_{ij} = \langle g_i, g_j \rangle$ כמובן.

מצד שני, הדיפרנציאל ניתן לייצוג על ידי היעקוביאן בבסיס של המישור המשיק, כלומר:

$$df(w) = J_f(w) = (f_1, \ldots, f_n) \cdot w$$

ולכן $(df(w))^j = f_j w^j$ כאשר f_k הוא הנגזרת של f לפי המשתנה ה$-k$.

אם כן:

$$f_j w^j = g_{ij} \nabla f^i w^j$$

ולכן:

$$\nabla f^i = g^{ij} f_j$$

<u>תרגיל:</u>

חשבו את הגרדיאנט של הפוקנציות הבאות על S^2.

א. $f(x, y, z) = z$.

<u>פתרון:</u>

פרמטריזציה של ספירת היחידה היא:

$$r(u,v)=(\cos u\sin v,\sin u\sin v,\cos v)$$

אחרי חישוב נקבל:

$$G=\begin{pmatrix}\sin^2 v & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},G^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sin^2 v} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

כעת, לפי הקואורדינטות על הספירה הפונקציה היא:

$$f(u,v)=f\left(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right)=z(u,v)=\cos v$$

לכן:

$$df=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial u}\\ \frac{\partial f}{\partial v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -\sin v\end{pmatrix}$$

ובסה"כ הגרדיאנט הוא:

$$\nabla f=G^{-1}df=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sin^2 v} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ -\sin v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -\sin v\end{pmatrix}$$

ב. $f(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2$.

<u>פתרון:</u>

במקרה זה מתקיים:

$$f(u,v)=a\cos^2 u\sin^2 v+b\sin^2 u\sin^2 v+c\cos^2 v$$

ולכן:

$$df = \begin{pmatrix} -2a\cos u\sin u\sin^2 v + 2b\cos u\sin u\sin^2 v \\ 2a\cos^2 u\cos v\sin v + 2b\sin^2 u\cos v\sin v - 2c\sin v\cos v \end{pmatrix}$$

והגרדיאנט יהיה:

$$\nabla f = G^{-1}df = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sin^2 v} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2a\cos u\sin u\sin^2 v + 2b\cos u\sin u\sin^2 v \\ 2a\cos^2 u\cos v\sin v + 2b\sin^2 u\cos v\sin v - 2c\sin v\cos v \end{pmatrix}$$

אחרי שמסדרים:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} (b-a)\sin 2u \\ (a\cos^2 u + b\sin^2 u - c)\sin 2v \end{pmatrix}$$

<u>שאלה:</u>

מתי שדה $v(u) = Au$ ב־$\mathbb{R}^n$ הוא גדריאנט של פונקציה סקלרית כלשהי?

<u>תשובה:</u>

כאשר המטריצה A סימטרית. נסו להסביר למה.

נגזרת לי:

תהי $f : M \to \mathbb{R}$ פונקציה, M משטח רגולרי. יהי v שדה משיק.

נגזרת לי של f לפי v מוגדרת כך:

$$L_v f(p) = \frac{d}{dt}\left(f \circ \beta(t)\right)|_{t=0} = df(v) = f_i v^i$$

כאשר $\beta(0) = p$, $\beta'(0) = v(p)$ עקומה כלשהי על M (β עקומה אינטגרלית).

נגזרת לי היא הכללה של הנגזרת הכיוונית; בנגזרת כיוונית גזרנו לפי כיוון קבוע, ואילו כאן גם הכיוון, שבא לידי ביטוי בשדה המשיק, משתנה.

<u>תרגיל:</u>

הוכיחו את הזהויות הבאות:

א. $L_{av+bw}f = aL_vf + bL_wf$.

<u>פתרון:</u>

בפשטות, לפי ההגדרה:

$$L_{av+bw}f = f_i\left(av+bw\right)^i = af_iv^i + bf_iw^i = aL_vf + bL_wf$$

ב. $L_v(fg) = fL_vg + gL_vf$.

<u>פתרון:</u>

כנ"ל:

$$L_v(fg) = \left(fg\right)_i v^i = \left(f_ig + g_if\right)v^i = gf_iv^i + fg_iv^i = fL_vg + gL_vf$$

נגזרת קוואריאנטית:

המוטיבציה היא שאיפה (בינינו, מי לא שאף את זה פעם) לגזור שדות משיקים לפי שדות משיקים אחרים.

כלומר, משהו מהצורה: "L_xy" כאשר $x(p), y(p) \in T_p(M)$.

נגדיר:

$$\mathring{\nabla}_x y = \begin{pmatrix} L_xy^1 \\ L_xy^2 \\ L_xy^3 \end{pmatrix}$$

כאשר y^i הם הרכיבים של y, והן פונקציות סקלריות.

אנו רוצים לעבוד עם וקטורים במישור המשיק (מי מאיתנו לא רצה את זה פעם), אך הוקטור הזה לא בהכרח נמצא במישור המשיק. במילים אחרות, הוא לא בהכרח שדה משיק.

איך נפתור את הבעיה? נגדיר את ההיטל מ־$\mathbb{R}^3$ למישור המשיק $T_p(M)$ על ידי:

$$\pi_{T_p(M)}(v) = v - \left\langle v, \vec{n}\right\rangle \vec{n}$$

כעת, נגדיר את הנגזרת הקוואריאנטית של y בכיוון x:

$$\nabla_x y(p) = \pi_{T_p(M)} \left(L_x y^1, L_x y^2, L_x y^3 \right)$$

<u>משפט:</u>

γ הוא קו גיאודזי אם ורק אם $\gamma''(s) \perp T_p(M)$, כלומר:

$$\gamma'' = c \cdot \vec{n}$$

כעת, נוכל לכתוב את המשפט בשפת הנגזרת הקוואריאנטית:

γ קו גיאודזי אם ורק אם:

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$$