תרגול 6 בדידה להנדסה

21 בינואר 2015

בקבוצות, כמו שאמרנו, אין סדר. נרצה להגדיר אובייקט עם סדר.

הגדרה:

זוג סדור הוא הקבוצה:

$$(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$$

לפי ההגדרה אכן נקבל $(a,b) \neq (b,a)$ כלומר הסדר בזוג כן משנה.

נגדיר את המכפלה הקרטזית בין שתי קבוצות A, B להיות:

$$A \times B = \{(a,b) | (a \in A) \wedge (b \in B)\}$$

כלומר, קבוצת כל הזוגות הסדורים שהאיבר הראשון בהם הוא איבר של A והאיבר השני בהם הוא איבר של B.

אפשר להכליל את המכפלה הקרטזית בין שתי קבוצות למכפלה בין n קבוצות:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_i \in A_i\}$$

האיברים $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ נקראים n־ יות סדורות.

שוב, שימו לב שיש חשיבות לסדר, ובדרך כלל $A \times B$ אינה שווה ל-$B \times A$.

<u>לדוגמה:</u>

נתבונן שתי הקבוצות: $A=\{1,2\}, B=\{4,f\}$, אזי:

$$A\times B=\{(1,4),(1,f),(2,4),(2,f)\}$$

$$B\times A=\{(4,1),(4,2),(f,2),(f,1)\}$$

יחס בין A ל-B הוא פשוט תת קבוצה של $A\times B$. כלומר, כל $R\subseteq A\times B$ היא יחס.

<u>לדוגמה:</u>

אם נחזור לדוגמה שלנו, נשים לב למשל שהקבוצה:

$$\{(1,4)\}$$

היא יחס בין A ל-B.

הקבוצה:

$$\{(4,2),(f,1)\}$$

היא יחס בין B ל-A.

נאמר ש-R הוא יחס על A, אם $R\subseteq A\times A$.

תכונות של יחסים:

1. נאמר שיחס $R\subseteq A\times A$ הוא רפלקסיבי, אם לכל $a\in A$:

$$(a,a)\in R$$

2. נאמר שיחס $R\subseteq A\times A$ הוא סימטרי, אם לכל $x,y\in A$,

$$(x,y)\in R\rightarrow (y,x)\in R$$

3. נאמר שיחס $R \subseteq A \times A$ הוא טרנזיטיבי, אם לכל $x, y, z \in A$,

$$(x, y), (y, z) \in R \to (x, z) \in R$$

4. נאמר שיחס $R \subseteq A \times A$ הוא אנטי רפלקסיבי, אם לכל $a \in A$,

$$(a, a) \notin R$$

5. נאמר שיחס $R \subseteq A \times A$ הוא אנטי סימטרי, אם לכל $x, y \in A$,

$$(x, y), (y, x) \in R \to x = y$$

<u>לדוגמה:</u>

נתבונן בקבוצה $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

היחס:

$$R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3), (4, 3), (3, 4), (4, 4)\}$$

הוא רפלקסיבי, כי איברי A הם $1, 2, 3, 4$ ואכן $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) \in R$.

הוא לא אנטי רפלקסיבי, כי למשל $1 \in A$ אך $(1, 1) \in A$.

הוא לא סימטרי, כי $(1, 2) \in R_1$ אך $(2, 1) \notin R_1$.

הוא אכן טרנזיטיבי, כי לכל שני זוגות שהאיבר השני באחד והראשון בשני זהים, כלומר $(x, y), (y, z) \in R_1$ אכן מתקיים $(x, z) \in R$.

הוא לא אנטי־סימטרי, כי $(3, 4), (4, 3) \in R_1$ אך $3 \neq 4$.

שימו לב!

אנטי סימטרי הוא לא ההיפך מסימטרי; יחסים יכולים להיות גם סימטריים וגם אנטי סימטריים, וגם לא סימטריים ולא אנטי־סימטריים.

באופן דומה, אנטי רפלקסיבי הוא לא ההיפך מרפלקסיבי; יחס יכול להיות גם לא רפלקסיבי וגם לא אנטי רפלקסיבי (אך לא גם וגם).

דוגמה:

יחס ההכלה מוגדר כך:

$$(A, B) \in R \iff A \subseteq B$$

היחס הוא רפלקסיבי, כי כל קבוצה מכילה את עצמה.

היחס הוא אנטי סימטרי, מכיוון שאם $A \subseteq B$ וגם $B \subseteq A$ אז $A = B$.

היחס הוא טרנזיטיבי, מכיוון שאם $A \subseteq B$ וגם $B \subseteq C$ אז $A \subseteq C$.