

שאלה 7

משתנה מקרי X מתפלג כדלקמן:

$$(a \neq b \neq c \neq 0) \quad P(X=1) = c, P(X=0) = b, P(X=-1) = a$$

א. אם התוחלת והשונות שוות ל-0.5, מצא את a, b, c .

ב. הוכח: $V(X) \leq 1$ (אין קשר לסעיף א').

פתרון:

(א) נמצא ביטויים לתוחלת ולשונות

$$E(X) = \sum_{i=-1}^1 i \cdot p(X=i) = (-1)a + 0 + 1c = c - a$$

$$E(X^2) = (-1)^2 a + 0 + 1^2 c = a + c$$

$$\Rightarrow V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = a + c - (c - a)^2$$

מהנתון על שוויון התוחלת ושהונות נרכיב את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} c - a = 1/2 \\ a + c - (c - a)^2 = 1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c - a = 1/2 \\ a + c = 3/4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow c = \frac{5}{8}, \quad a = \frac{1}{8}$$

לבסוף נמצא את b (סכום ההסתברויות הוא 1)

$$a + b + c = 1 \Rightarrow b = 1/4$$

(ב) נשתמש בביטוי הפרמטרי שמצאנו בסעיף א'

$$V(X) \leq a + c - (c - a)^2 \leq a + c = 1 - b \leq 1$$