# תרגיל 9

23 בדצמבר 2017

**שאלה 1**

מצא את הנקודה על הפרבולה $y = 2x^2 + 5$ שמרחקה מראשית הצירים הוא מינימלי.

**הדרכה:**

מרחק של נקודה $(x, y)$ מראשית הצירים נתון על ידי נוסחה $\sqrt{x^2 + y^2}$ .

תבנו פונקציה $g(x) = \sqrt{x^2 + y^2}$, בטאו אותה באמצעות $x$, ומצאו את המינימום המוחלט שלה.

**פתרון:**

נגדיר פונקציה $g(x) = \sqrt{x^2 + (2x^2 + 5)^2} = \sqrt{4x^4 + 21x^2 + 25}$, נשים לב שהפונקציה רציפה בכל $x$ ממשי,

נחפש נקודות קריטיות: $g^{'}(x) = \frac{x(8x^2+21)}{\sqrt{4x^2+21x^2+25}}$ , ולכן $g^{'}(x) = 0$ אם $x = 0$.

נשתמש במבחן נגזרת ראשונה:

קל לראות שכאשר $x < 0$ $g^{'}(x) < 0$ ולכן הפונקציה יורדת

כאשר $x > 0$ $g^{'}(x) > 0$ ולכן הפונקציה עולה

כמסקנה אנו מקבלים שב־$x = 0$ יש נקודת מינימום, שהיא גם מינימום מוחלט.

נציב אותה בפונקציה ונקבל $y = 5$ ולכן נקודה $(0, 5)$ היא נקודה על הפרבולה שהכי קרובה לראשית הצירים.

**שאלה 2**

מצא מינימום ומקסימום מוחלט עבור הפונקציה הבאה בקטע $[-2, 2]$:

$$f(x) = 4 + |1 - x^2|$$

**פתרון:**

קודם כל נשים לב שהפונקציה רציפה ב־$\mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} 5 - x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ 3 + x^2 & x < -1 \text{ or } x > 1 \end{cases}$$

נחפש נקודות קריטיות:

בתחום $x < -1$ או $x > 1$ $f^{'}(x) = 2x = 0$ אם $x = 0$ אבל הנקודה לא נמצאת בתחום ולכן היא לא מעניינת

בתחום $-1 \leq x \leq 1$ $f^{'}(x) = -2x = 0$ אם $x = 0$

נבדוק גזירות בנקודות $x = \pm 1$:

$x = 1$: נתבונן בביטוי $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$ כאשר $f(1) = 4$

יהי $x \approx 1$, $x = 1 + \Delta x$ , $\Delta x > 0$ אינפי',

$st(\frac{\Delta y}{\Delta x}) = st(\frac{3+(1+\Delta x)^2-4}{\Delta x}) = 2$

יהי $x \approx 1$, $x = 1 + \Delta x$, $\Delta x < 0$, אינפי':

$st(\frac{\Delta y}{\Delta x}) = st(\frac{5-(1+\Delta x)^2-4}{\Delta x}) = -2$

ולכן $x = 1$ זו נקודה שבה הנגזרת לא מוגדרת ולכן היא נקודה קריטית נוספת.

באותו אופן קל לראות ש־$x = -1$ היא נקודת אי גזירות ולכן גם נקודה קריטית.

שתי נקודות קריטיות נוספות הן הקצוות: $x = \pm 2$.

נציב בפונקציה את כל הנקודות הקריטיות ונשווה בין הערכים:

$f(0) = 5$, $f(1) = f(-1) = 4$, $f(2) = f(-2) = 7$

ולכן מקבלים ש־$x = \pm 2$ הן נקודות מקסימום מוחלט, $x = \pm 1$ הן נקודות מינימום מוחלט.

**שאלה 3**

מצא נקודות קיצון מקומי ומוחלט (אם יש), תחומי עליה/ירידה, נקודות פיתול (אם יש), תחומי קמירות/קעירות של הפונקציות הבאות:

א) $f(x) = x^3 - 3x^2$

ב) $f(x) = x \cdot e^x$

ג) $f(x) = ln(sin(x))$ בתחום $(0, \pi)$

ד) $f(x) = sin^2(x)$ בתחום $[0, \pi]$

**פתרון:**

א) פונקציה היא פולינום ולכן רציפה בכל מקום.

$f^{'}(x) = 3x(x-2) = 0$ כאשר $x = 0, 2$

$f^{''}(x) = 6x - 6 = 0$ כאשר $x = 1$ ולכן זו נקודה שחשודה לפיתול

נבנה טבלה:

| $x$ | $x < 0$ | $x = 0$ | $0 < x < 1$ | $x = 1$ | $1 < x < 2$ | $x = 2$ | $x > 2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | עולה | 0 | יורדת | -2 | יורדת | -4 | עולה |
| $f^{'}(x)$ | $+$ | 0 | - | -3 | - | 0 | $+$ |
| $f^{''}(x)$ | - | -6 | - | 0 | $+$ | 6 | $+$ |

הסימן של הנגזרת הראשונה נקבע על ידי הצבה של נקודה בקטע נתון, למשל כאשר $x < 0$ נבחר $x = -1$ (כל נקודה אחרת שלילית מתאימה)

ונקבל $f^{'}(-1) = 9$ ולכן בתחום הזה הפונקציה עולה, $f^{''}(-1) = -12$ ולכן בתחום הזה הנגזרת השנייה היא שלילית ולכן הפונקציה היא קעורה

מהטבלה נסיק ש:

תחומי עלייה: $x < 0$, $x > 2$

תחום ירידה: $0 < x < 2$

תחום קמירות: $x > 1$

תחום קעירות: $x < 1$

נקודת פיתול: $x = 1$

נקודת מינימום מקומי: $x = 2$ (לפי מבחן נגזרת ראשונה)

נקודת מקסימום מקומי : $x = 0$ (לפי מבחן נגזרת ראשונה)

נקודות מינימום/מקסימום מוחלט: אין

ב) נשים לב שהפונקציה היא רציפה בכל מקום

$f^{'}(x) = e^x(1 + x) = 0$ אם $x = -1$, ולכן זו נקודה קריטית

$f^{''}(x) = e^x(2 + x) = 0$ אם $x = -2$ ולכן זו נקודה חשודה לפיתול

| $x$ | $x<-2$ | $x=-2$ | $-2<x<-1$ | $x=-1$ | $x>-1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | יורדת | $-2\cdot e^{-2}$ | יורדת | $-e^{-1}$ | עולה |
| $f^{'}(x)$ | - | $-e^{-2}$ | - | 0 | $+$ |
| $f^{''}(x)$ | - | 0 | $+$ | $e^{-1}$ | $+$ |

מהטבלה נסיק ש:

1) תחום ירידה: $x<-1$

תחום עלייה: $x>-1$

תחום קמירות: $x>-2$

תחום קעירות: $x<-2$

נקודת מינימום: $x=-1$

נקודת מקסימום: אין

נקודת פיתול: $x=-2$

נקודת מינימום מוחלט: $x=-1$, נקודת מקסימום מוחלט: אין

ג) $f$ רציפה בתחום שבו $sin(x)>0$ כלומר היא רציפה בתחום שלנו

$f^{'}(x)=\frac{cos(x)}{sin(x)}$, הנגזרת מוגדרת בכל נקודה של הקטע הנתון

$f^{'}(x)=0$ כאשר $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, הנקודה היחידה שבה נגזרת מתאפסת אשר נמצאת בקטע שלנו היא $x=\frac{\pi}{2}$

$f^{''}(x)=-\frac{1}{sin^2(x)}\neq 0$ לכל $x$, ולכן אין נקודות אשר חשודות לפיתול

| $x$ | $0<x<\frac{\pi}{2}$ | $x=\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | עולה | 0 | יורדת |
| $f^{'}(x)$ | $+$ | 0 | - |
| $f^{''}(x)$ | - | -1 | - |

תחום עלייה: $0<x<\frac{\pi}{2}$

תחום ירידה: $\frac{\pi}{2}<x<\pi$

תחום קעירות: $0<x<\pi$

נקודת מקסימום: $x=\frac{\pi}{2}$

נקודת מינימום: אין

נקודת פיתול: אין

נקודת מקסימום מוחלט: $x=\frac{\pi}{2}$, נקדות מינימום מוחלט: אין

ד) $f(x)=sin^2(x)$

נשים לב שהפונקציה היא רציפה בכל מקום ובפרט בקטע שלנו, בנוסף הקטע חסום וסגור ולכן גם מתקבל בו מינימום ומקסימום מוחלט.

$f^{'}(x)=sin(2x)=0$ ב-$x=\frac{\pi}{4}$

$f^{''}(x)=2cos(2x)=0$ כאשר $x=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}$ ולכן אלה נקודות שחשודות לפיתול.

| $x$ | $0<x<\frac{\pi}{4}$ | $x=\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$ | $x=\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{4}$ | $x=\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{3\pi}{4}<x<\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | עולה | $\frac{1}{2}$ | עולה | 1 | יורדת | $\frac{1}{2}$ | יורדת |
| $f^{'}(x)$ | $+$ | 1 | $+$ | 0 | - | -1 | - |
| $f^{''}(x)$ | $+$ | 0 | - | -2 | - | 0 | $+$ |

תחומי עלייה: $0<x<\frac{\pi}{2}$

תחום ירידה: $\frac{\pi}{2}<x<\pi$

תחום קעירות: $\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}$

תחומי קמירות: $0<x<\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}<x<\pi$

נקודת מקסימום מקומית: $x=\frac{\pi}{2}$

נקודות פיתול: $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$

נמצא נקודות מינימום, מקסימום מוחלט: $f(0) = f(\pi) = 0$, $f(\frac{\pi}{2}) = 1$ ולכן הקצוות הן נקודות מינימום מוחלט, $\frac{\pi}{2}$ היא נקודת מקסימום מוחלט.

**שאלה 4**

א) הוכח שלמשוואה $2x = cos(x)$ יש פתרון יחיד

**פתרון:**

נעביר אגף ונגדיר את הפונקציה הבאה: $g(x) = 2x - cos(x)$

$g$ היא פונקציה רציפה בכל הממשיים ולכן נבדוק בעזרת משפט ערך הביניים האם יש בכלל פתרון:

$g(0) = -1 < 0$, $g(5) = 2 + sin(x) > 0$, ולכן לפי משפט ערך הביניים יש לפחות פתרון אחד, נראה שהוא פתרון יחיד:

$g^{'}(x) = 2 + sin(x) > 0$ לכל $x$ ממשי , ולכן הפונקציה היא פונקציה עולה, ולכן בהכרח תחתוך את ציר ה־$x$ בנקודה אחת בדיוק

ב)מצא את מספר הפתרונות של המשוואות הבאות בקטע נתון:

1) $x^4 + x^2 = 2$ בקטע $[0, 2]$

**פתרון:**

כמו מקודם נעביר אגף ונגדיר פונקציה $g(x) = x^4 + x^2 - 2$

זו פונקציה רציפה בקטע נתון ובנוסף $g(0) = -2$, $g(2) = 18$ ולכן לפי משפט ערך הביניים יש לפחות פתרון אחד בקטע (הצבה פשוטה מראה ש־$x = 1$ מקיים את המשוואה)

$g^{'}(x) = 2x(2x^2 + 1)$, קל לראות שהנגזרת מתאפסת בנקודה $x = 0$, ובכל $0 < x \leq 2$ , $g^{'}(x) > 0$ ולכן הפונקציה היא עולה ולכן תחתוך את ציר ה־$x$ בנקודה אחת בלבד, ולכן יש רק פתרון יחיד $x = 1$.

2) $e^x = 10x$ בקטע $[0, 10]$

**פתרון:**

נגדיר $f(x) = e^x - 10x$, זו פונקציה רציפה, נבדוק האם יש לה בכלל פתרון בקטע:

$f(0) = 1 > 0$, $f(10) = e^{10} - 100 > 0$, ולכן משפט ערך הביניים לא עוזר כאן.

$f^{'}(x) = e^x - 10 = 0$ כאשר $x = ln(10) \in [0, 10]$,

$f^{''}(x) = e^x$, $f^{''}(ln(10)) = e^{ln(10)} = 10 < 0$ ולכן זו נקודת מינימום מקומי.

נתבונן בקטע $[0, ln(10)]$: בקטע הזה הפונקציה היא רציפה, בנוסף $f(0) > 0$, $f(ln(10)) < 0$ ולכן יש פתרון בקטע הזה. בנוסף $f^{'}(x) < 0$ שם ולכן יש בדיוק פתרון אחד ב־$[0, ln(10)]$

עכשיו נתבונן בקטע $[ln(10), 10]$: גם שם הפונקציה היא רציפה, $f(10) > 0$, $f(ln(10)) < 0$ ולכן יש בקטע הזה עוד פתרון, ומשום שבקטע הזה הנגזרת היא חיובית אזי יש בדיוק פתרון אחד ב־$[ln(10), 10]$

ולכן סה"כ יש 2 פתרונות לפונקציה בקטע נתון

ג) תהי $f(x) = ln^2(x) - 5ln(x) + 6$ הוכיח כי קיימת נקודה $c \in [e^2, e^3]$ כך ש־$f^{'}(c) = 0$.

**פתרון:**

הפונקציה היא רציפה בקטע נתון וגזירה בקטע פתוח $(e^2, e^3)$, בנוסף $f(e^2) = f(e^3) = 0$ ולכן לפי משפט רול קיימת $e^2 < c < e^3$ כך ש־$f^{'}(c) = 0$

**שאלה 5**

תהי $f$ רציפה ב־$[a,b]$ וגזירה ב־$(a,b)$ , אזי קיימת נקודה $c \in (a,b)$ כך ש־ $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

**תרגיל:**

תהי $f$ גזירה ב־$(a,b)$ ורציפה ב־$[a,b]$ כל ש־$f'(x) = 0$ לכל $x \in (a,b)$. הוכיחו ש־$f$ קבועה בקטע.

**פתרון:**

יהיו $x_1 \neq x_2$ בקטע. לפי משפט לגרנז' קיים $c \in (x_1,x_2)$ כך ש־ $f'(c) = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = 0$ ולכן $f(x_1) = f(x_2)$

זה נכון לכל שתי נקודות בקטע ולכן הפונקציה היא קבועה.

**תרגיל:**

הוכיחו שלכל $0 < a < b$ מתקיים $\frac{b-a}{1+b} < ln(\frac{1+b}{1+a}) < \frac{b-a}{1+a}$

**פתרון:**

$ln(\frac{x}{y}) = ln(x) - ln(y)$

ולכן $ln(\frac{1+b}{1+a}) = ln(1) + b - (ln(1) + a)$ , נחלק את כל אגפי אי שוויון ב־$a - b$ (מותר כי $a \neq b$)

$\frac{1}{1+b} < \frac{ln(1+b)-ln(1+a)}{b-a} < \frac{1}{1+a}$

לפי משפט לגרנג' קיים $c \in (a,b)$ כך ש־$\frac{1}{1+c} = (ln(1+x))'|_c = \frac{ln(1+b)-ln(1+a)}{b-a}$

$a < c < b$ ולכן $a+1 < c+1 < b+1$ ולכן $\frac{1}{b+1} < \frac{1}{c+1} < \frac{1}{a+1}$

ולכן $\frac{1}{b+1} < \frac{ln(1+b)-ln(1+a)}{b-a} < \frac{1}{a+1}$