פתרון תרגיל 2 אינפי 1 מדמ"ח

בראש העבודה שלכם יש צורך לרשום את הפרטים הבאים:

- **שם מלא + ת.ז.**
- **מספר תרגיל.**
- **שם מתרגל/מספר קבוצה.**

תרגיל 1. יהיו $S \subseteq T \subseteq \mathbb{R}$ קבוצות חסומות מלעיל.
הוכיחו כי $\sup S \leq \sup T$.

פתרון.

$\sup T$ הוא חסם מלעיל של T, כלומר מתקיים ש $\forall x \in T \,:\, x \leq \sup T$.

נתון בנוסף כי $S \subseteq T$ ולכן $x \in S \implies x \in T$, ולכן $\forall x \in S \,:\, x \leq \sup T$, כלומר $\sup T$ הוא חסם מלעיל של S.

כעת, כיוון ש $\sup S$ הוא חסם עליון של S, אזי לפי הגדרה הוא קטן או שווה לכל חסם מלעיל של S, ולכן $\sup S \leq \sup T$ כדרוש.

תרגיל 2. תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה חסומה מלעיל. נגדיר $B = \{-a \,|\, a \in A\}$.
הוכיחו כי B חסומה מלרע, וכן כי $\inf B = -\sup A$.

פתרון.

A חסומה מלעיל, ולפי השלימות של $\mathbb{R}$ יש לה חסם עליון, $\sup A$.

בפרט, $\sup A$ הוא חסם מלעיל של A ולכן $\forall a \in A \; a \leq \sup A$.

נקבל כי $\forall b \in B \; b \geq -\sup A$, כלומר B חסומה מלרע ע"י $-\sup A$.

נותר להוכיח כי $-\sup A$ הוא אכן החסם התחתון של B.

נניח בשלילה ש $-\sup A$ הוא לא החסם התחתון של B, ולכן קיים חסם מלרע גדול ממנו. כלומר, קיים $m > -\sup A$ כך ש $\forall b \in B \; b \geq m$.

מכאן שלכל $a \in A$, $a \leq -m$, וקיבלנו ש$-m$ חסם מלעיל של A שגדול מ $\sup A$, בסתירה!

תרגיל 3. תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ עבורה מתקיים שלכל $a \in A$, $a > 0$.
נגדיר $A^{-1} = \left\{ \frac{1}{a} \,\middle|\, a \in A \right\}$.
הוכיחו:

1. אם $\inf A \neq 0$, אזי m חסם תחתון של A אם ורק אם $\frac{1}{m}$ חסם עליון של A^{-1}.
2. $\inf A = 0$ אם ורק אם A^{-1} אינה חסומה מלעיל.

פתרון.

1. $\Longleftarrow$:

m חסם תחתון של A, ובפרט חסם מלרע; כלומר, לכל $a \in A$ מתקיים $m \leq a$.

אם כן, לכל $b \in A^{-1}$ מתקיים $b \leq \frac{1}{m}$, ומכן ש $\frac{1}{m}$ חסם מלעיל של A^{-1}.

כעת, נניח בשלילה ש $\frac{1}{m}$ אינו החסם העליון של A^{-1}. לכן, קיים $M < \frac{1}{m}$ כך שלכל $b \in A^{-1}$ מתקיים $b \leq M$.

אם כן, לכל $a \in A$ מתקיים $\frac{1}{M} \leq a$, ולכן $\frac{1}{M}$ חסם מלרע הגדול מ m, בסתירה!

$\Longrightarrow$:

באופן דומה לכיוון הקודם, ניתן להוכיח כי אם M' חסם עליון של A^{-1}, אז $\frac{1}{M'}$ חסם תחתון של A, ולקבל את הדרוש.

2. הערה: ניתן להוכיח גם פה ישירות, כמו בסעיף 1.

$\Longleftarrow$:

נניח כי 0 חסם תחתון של A, ונניח בשלילה כי A^{-1} חסומה מלעיל, ובפרט ניתן לסמן את החסם העליון שלה M.

לפי הסעיף הקודם, $\frac{1}{M} \neq 0$ הוא החסם התחתון של A, בסתירה.

$\Longrightarrow$:

נניח כי A^{-1} איננה חסומה מלעיל, ונניח בשלילה כי 0 אינו החסם התחתון של A.

אפס חסם מלרע של A (לפי הנתון שלכל $a \in A$ מתקיים $a > 0$), ולכן קיים חסם תחתון ל-A, נסמנו $m > 0$.

לפי הסעיף הקודם, $\frac{1}{m}$ הוא חסם עליון של A^{-1}, בסתירה!

תרגיל 4. לכל אחת מהקבוצות הבאות מצאו חסם עליון, חסם תחתון, מקסימום ומינימום (אם קיימים). הוכיחו את תשובתכם.

1. $A = \left\{ \frac{2n}{n^2+1} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$
2. $B = \left\{ \frac{1}{n^2} + 6(-1)^n \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$

3. $C=\left\{n+\frac{1}{m}\,\middle|\,n,m\in\mathbb{N}\right\}$
4. $D=\left\{\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\,\middle|\,n\in\mathbb{N}\right\}$

פתרון.

נכתוב תשובות סופיות, ונוכיח רק את סעיף 2 באופן מלא. כמובן שהפתרון שהגשתם צריך להיות מלא.

1. $\max A=\sup A=1$; $\inf A=0\notin A$ ולכן אין לקבוצה מינימום.
2. נוכיח כי $\max B=\sup B=6\frac{1}{4}$; $\inf B=-6$, וכי אין מינימום לקבוצה.

ראשית נוכיח ש $6\frac{1}{4}$ הוא חסם מלעיל השייך לB. כיוון שהוא בקבוצה, נסיק שהוא גם מקסימום ולכן גם חסם עליון.

צריך להראות שכל איבר בקבוצה קטן או שווה לו, כלומר שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\frac{1}{n^2}+6(-1)^n\le 6\frac{1}{4}$.

עבור $n=1$ הטענה ברורה.

לכל $n\ge 2$, מתקיים:

$$\frac{1}{n^2}+6(-1)^n\le\frac{1}{n^2}+6\le 6\frac{1}{4}$$

כדרוש. ולכן $6\frac{1}{4}$ הוא המקסימום של B וכן החסם העליון.

כעת נוכיח ש -6 הוא חסם מלרע של B, ואחר מכן שהוא החסם התחתון.

ראשית, לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים

$$\frac{1}{n^2}+6(-1)^n\ge\frac{1}{n^2}-6>-6$$

ולכן זהו אכן חסם מלרע, ובנוסף הראנו כי $-6\notin B$.

נותר להוכיח כי זהו החסם התחתון.

יהי $\epsilon>0$, נרצה למצוא איבר בקבוצה המקיים

$$\frac{1}{n^2}+6\left(-1\right)^n<-6+\epsilon$$

כיוון שצריך להראות שקיים n המקיים זאת, מספיק למצוא אחד כזה אי-זוגי.

עבור n אי-זוגי מתקיים

$$\frac{1}{n^2}+6\left(-1\right)^n=\frac{1}{n^2}-6<-6+\epsilon$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{1}{n^2}<\epsilon$$
$$\Updownarrow$$
$$n>\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$$

כיוון ש-$\mathbb{N}$ אינה חסומה מלעיל, קיים n אי-זוגי כזה (למשל $n=2\lceil\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\rceil+1$), ולכן -6 הוא אכן החסם התחתון של B.

כיוון שהוכחנו ש-$-6\notin B$, אין לקבוצה מינימום.

3. הקבוצה לא חסומה מלעיל, כלומר $\sup C=\infty$, ואין לה מקסימום. $\inf C=1\notin C$ ולכן אין לקבוצה מינימום.

4. $\min D=-\frac{1}{12}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\inf D$; $D\notin\frac{1}{4}=\sup D$ ולכן אין לקבוצה מקסימום.