

מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

31 במאי 2016

תרגיל 7 - σ -אלגברה והתפלגויות רציפות

1. תהי $\Omega \neq \emptyset$. יהי $E \neq \emptyset$ אוסף כלשהו של תתי קבוצות ב- Ω . נסמן ב- B את אוסף כל הסיגמא-אלגבראות של Ω המכילות את E .

(א) יהי $\mathcal{P}(\Omega)$ אוסף כל תת-הקבוצות של Ω . הוכיחו כי $\mathcal{P}(\Omega)$ היא סיגמא-אלגברה. הסיקו כי $B \neq \emptyset$.

(ב) נגדיר $\mathcal{A}_E = \bigcap_{A \in B} A$ הוכיחו כי \mathcal{A}_E היא סיגמא-אלגברה.

(ג) הוכיחו כי \mathcal{A}_E היא הסיגמא-אלגברה המינימלית המכילה את E .

2. תהי $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ סיגמא-אלגברה על X . תהי $Y \subseteq X$ תת-קבוצה.

(א) קבעו האם $\{A \in \mathcal{A} : A \subseteq Y\}$ ו- $\{A \cap Y : A \in \mathcal{A}\}$ הן סיגמא-אלגבראות. כיצד תשתנה תשובתכם אם נתון בנוסף ש $Y \in \mathcal{A}$.

(ב) יהי (Ω, \mathcal{A}, P) מרחב הסתברות. ותהי $B \in \mathcal{A}$ כך ש: $P(B) > 0$.

נגדיר: (B, \mathcal{A}_B, P_B) באופן הבא: $\mathcal{A}_B = \{A \cap B \mid A \in \mathcal{A}\}$ ולכל קבוצה

$$c \in \mathcal{A}_B \text{ נגדיר } P_B(C) = P(C)/P(B)$$

הוכיחו כי (B, \mathcal{A}_B, P_B) מרחב הסתברות.

3. יהי X משתנה מקרי בעל פונקציית הצפיפות הבאה:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ c & 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

(א) מצאו את c .

(ב) רשמו את פונקציית ההצטברות.

(ג) חשבו את $P(\frac{1}{3} < x < \frac{3}{4})$.

(ד) חשבו את התוחלת של X .

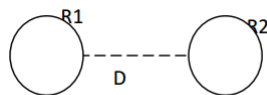
4. המ"מ X הוא בעל פונקציית הצפיפות:

$$f_X(x) = \begin{cases} c \cdot \cos(x) & |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(א) מצאו את c .

(ב) מצאו את פונקציית ההתפלגות של X .

5. לפניכם זוג מעגלים שרדיוסיהם $R_1 \sim U(0, R)$ ו- $R_2 \sim U(0, R)$ הם משתנים מקריים בלתי תלויים (רציפים) בעלי התפלגות אחידה. יהי D המרחק בין הכדורים. מצאו את ההסתברות לכך שאחד המעגלים מקיף את משנהו.



6. רכבת מגיע לתחנה כל 15 דקות החל מהשעה שש בבוקר. אדם מגיע לתחנה כל בוקר בין השעה 7:10 ל-7:30.

יהי X מספר הדקות מ-7:10 עד להגעת האדם לתחנה. ויהי Y מספר הדקות שהאדם נדרש לחכות לרכבת.

(א) חשבו את פונקציית ההצטברות והצפיפות של Y בהינתן אלו של X .

(ב) חשבו את הצפיפות של Y בהנחה ש X בעל התפלגות אחידה.