הרצאה 19

נכתב על ידי נועם יערי

הערה

תהליך גראם שמידט: $B=\{v_1,\cdots,v_n\}$ בסיס כשלהו $\leftarrow$ $\tilde{B}=\{\widetilde{v_1},\cdots,\widetilde{v_n}\}$ בסיס אורתוגונלי.

נסמן ב - C את מטריצת המעבר מ - B ל - $\tilde{B}$.

$$\widetilde{v_1}=v_1$$
$$\widetilde{v_2}=v_2-(\cdots)v_1$$
$$\widetilde{v_3}=v_3-(\cdots)v_1-(\cdots)v_2$$
$$\vdots$$
$$\widetilde{v_n}=v_n-(\cdots)v_1-(\cdots)v_2-\cdots-(\cdots)v_{n-1}$$
$$\Downarrow$$
$$C=\begin{pmatrix}1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & 1 & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}$$

כדי לקבל בסוף התהליך בסיס אורתונורמלי יש שתי גישות שקולות:

1. להשתמש בנרמול של כל אחד מ - $\widetilde{v_1},\cdots,\widetilde{v_n}$.

$$\widetilde{v_1}^o=\frac{1}{||\widetilde{v_1}||}\widetilde{v_1}$$
$$\vdots$$
$$\widetilde{v_n}^o=\frac{1}{||\widetilde{v_n}||}\widetilde{v_n}$$

נקבל בסיס אורתונורמלי: $\tilde{B}^o=\{\widetilde{v_1}^o,\cdots,\widetilde{v_n}^o\}$.

2. נשתמש בנרמול בסוף של כל שלב של תהליך גראם שמידט.

$$\widetilde{v_1}^o=\frac{1}{||\widetilde{v_1}||}\widetilde{v_1}$$
$$\widetilde{v_2}^o=\frac{1}{||\widetilde{v_2}||}\widetilde{v_2}$$

משפט

כל קבוצה אורתונורמלית ניתנת להשלמה עד לבסיס אורתונורמלי.

הוכחה

תהי $S=\{e_1,\cdots,e_k\}$ קבוצה אורתונורמלית.

אם $k = n$, אזי S הוא בסיס אורונורמלי. נניח ש- $k < n$. נרצה לבנות בסיס אורתונורמלי כך ש k – הווקטורים הראשונים הם $e_1, \cdots, e_k$.

קודם נשלים $S = \{e_1, \cdots, e_k\}$ עד בסיס $B = \{e_1, \cdots e_k, v_{k+1}, \cdots v_n\}$ של V. נפעיל את תהליך גראם שמידט על הבסיס - B. נקבל שב – k השלבים ראשונים לא יהיה שינוי:

$$\widetilde{v_1} = e_1$$

$$\widetilde{v_2} = e_2 - \overbrace{\pi_{\{e_1\}}(e_2)}^{\vec{0}} = e_2$$

נימוק: $\pi_{\{e_1\}}(e_2) = \dfrac{\overbrace{<e_2,e_1>}^{\frac{0}{<e_1,e_1>}=0}}{<e_1,e_1>} \cdot e_1 = 0$.

נמשיך באופן דומה:

$$\vdots$$

$$\widetilde{v_k} = e_k - \overbrace{\pi_{\{e_1,\cdots,e_{k-1}\}}(e_k)}^{\vec{0}} = e_k$$

לכן, נקבל בסוף התהליך בסיס אורתוגונלי $\{e_1, \cdots, e_k, \widetilde{v_{k+1}}, \cdots, \widetilde{v_n}\}$. אחרי הנרמול נקבל בסיס אורתונורמלי כנדרש.

■

מסקנה (אי שוויון בסל Bessel)

תהי $\{e_1, \cdots, e_k\}$ קבוצה אורתונורמלית. יהי $v \in V$. נסמן $\alpha_i = < v, e_i >$ ($1 \le i \le k$). אזי מתקיים אי-שוויון $||v||^2 \ge |\alpha_1|^2 + \cdots + |\alpha_k|^2$.

שוויון מתקיים אם ורק אם $v \in span\{e_1, \cdots e_k\}$

הוכחה

קודם כל נשלים את $S = \{e_1, \cdots e_k\}$ עד בסיס אורתונורמלי $B = \{e_1, \cdots, e_k, e_{k+1}, \cdots e_n\}$. לפי משפט פיתגורס מתקיים שוויון $||v||^2 = |\alpha_1|^2 + \cdots + |\alpha_k|^2 + |\alpha_{k+1}|^2 + \cdots + |\alpha_n|^2$

כאשר: $\alpha_i =< v, e_i >$ לכל $1 \le i \le n$.

לכן, $||w||^2 \ge |\alpha_1|^2 + \cdots + |\alpha_k|^2$. שוויון מתקיים אם ורק אם $|\alpha_{k+1}| = \cdots = |\alpha_n| = 0$, אם ורק אם $\alpha_{k+1} = \cdots = \alpha_n = 0$, אבל $[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \\ \alpha_{k+1} \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, לכן, $\alpha_{k+1} = \cdots = \alpha_n = 0$ אם ורק אם $v = \alpha_1 e_1 + \cdots \alpha_k e_k$ אם ורק אם $v \in span\{e_1, \cdots e_k\}$.

■

משפט

מאי שוויון בסל נובעת הוכחה אחרת של אי שוויון קושי שוורץ. נתבונן בזוג $\{v, w\}$. נניח ש - $w \neq 0$. נגדיר $e_1 = \frac{1}{||w||}w$ נתבונן ב – $S = \{e_1\}$, S קבוצה אורתונורמלית. נסמן $\alpha_1 = < v, e_1 >$. נשתמש באי שוויון בסל. נקבל $|\alpha_1|^2 \geq ||v||^2$.

$$\alpha_1 = < v, e_1 > = < v, \frac{1}{||w||}w > = \frac{1}{||w||} < v, w >$$

$$|\alpha_1| = \frac{1}{||w||}|< v, w >|$$

$$||v||^2 \geq \frac{1}{||w||^2}(|< v, w >|)^2$$

$$||v||^2||w||^2 \geq (| < v, w > |)^2$$

$$||v|| \cdot ||w|| \geq | < v, w > |$$

■

מרחב ניצב

תזכורת

יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהי $W \subset V$ תת מרחב.

$$W^{\perp} = \{v \in V \mid \forall w \in W : < v, w > = 0\}$$

$W^{\perp}$ נקרא **מרחב ניצב** ל - W.

הערה

יהי $B = \{v_1, \cdots, v_k, v_{k+1}, \cdots, v_n\}$ בסיס <u>אורתוגונלי</u> עבור V.

יהי $W = span\{v_1, \cdots, v_k\}$. אזי: $W^{\perp} = span\{v_{k+1}, \cdots, v_n\}$.

הוכחה

$\boxed{\subseteq}$

יהי $v \in W^{\perp}$, ונוכיח כי $v \in span\{v_{k+1}, \cdots, v_n\}$.

$v \in W^{\perp}$, לכן לכל $w \in W$ מתקיים: $< v, w > = 0$.

בפרט עבור $w = v_1, \cdots, w = v_k$, מתקיים: $< v, w > = 0$, כלומר:

$$(*): \begin{cases} < v, v_1 > = 0 \\ \vdots \\ < v, v_k > = 0 \end{cases}$$

כעת, נרשום את v כצירוף ליניארי של איברי B.

$$v = \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_k \cdot v_k + \alpha_{k+1} \cdot v_{k+1} + \cdots + \alpha_n \cdot v_n$$

מהשוויונים (*) נקבל:

$$\alpha_1 = 0 \ \wedge \cdots \wedge \alpha_k = 0$$

לכן:

$$v = \alpha_{k+1} \cdot v_{k+1} + \cdots + \alpha_n \cdot v_n$$

כלומר:

$$v \in span\{v_{k+1} \cdots, v_n\}$$

$\boxed{\supseteq}$

יהי $v \in span\{v_{k+1}, \cdots, v_n\}$, ונוכיח כי $v \in W^{\perp}$.

$$v = \alpha_{k+1} \cdot v_{k+1} + \cdots + \alpha_n \cdot v_n$$

מיחידות ההצגה לפי הבסיס B נקבל:

$$(*): \begin{cases} < v, v_1 > = 0 \\ \vdots \\ < v, v_k > = 0 \end{cases}$$

לכן: $v \in \{v_1, \cdots, v_k\}^{\perp}$, ועפ"י טענה שהוכחנו $\left(S^{\perp} = \left(span(S)\right)^{\perp}\right)$, מתקיים:

$$v \in span\{v_1, \cdots, v_k\}^{\perp} = W^{\perp}.$$

■

מסקנה

$$W = (W^{\perp})^{\perp}$$

הוכחה

נבחר ב-W בסיס אותוגונלי $\{v_1, \cdots, v_k\}$, ונשלים אותו עד בסיס אורתוגונלי של V:

$$B = \{v_1, \cdots v_k, v_{k+1}, \cdots v_n\}$$

נקבל $W^{\perp} = span\{v_{k+1}, \cdots, v_n\}$ ולכן $(W^{\perp})^{\perp} = span\{v_1, \cdots, v_k\} = W$.

תרגיל: להוכיח את המסקנה ללא שימוש של בסיסים.

■

משפט (פירוק ניצב)

לכל $V \subset W$, מתקיים $V = W \oplus W^{\perp}$.

הוכחה

נבחר ב $W -$ בסיס אורתוגונלי $\{v_1, \cdots v_n\}$. נשלים אותו עד בסיס אורתוגונלי B של V:

$B = \{v_1, \cdots, v_k, v_{k+1}, \cdots v_n\}$, אזי $W = span\{v_1, \cdots, v_k\}$, $W^{\perp} = span\{v_{k+1}, \cdots v_n\}$.

לכן: $V = W + W^{\perp} \wedge W \cap W^{\perp} = \{0\}$ (נובע מההערה הקודמת ומיחידות ההצגה), כלומר:

$V = W \oplus W^{\perp}$.

תרגיל: הוכח ללא שימוש של בסיסים!

■

מסקנה

ההיטל של v על w אינו תלוי בחירה של בסיס אורתוגונלי של w.

הוכחה

יהיו B,B' בסיסים אורתוגונליים של w.

יהי $v\in V$. אזי $v=\overbrace{\pi_B(v)}^{W}+\overbrace{[v-\pi_B(v)]}^{W^\perp}$

$$v=\pi_{B'}(v)+[v-\pi_{B'}(v)]$$

מיחידות ההצגה של כל וקטור כסכום של וקטורים של W ושל $W^\perp$ נקבל $\pi_{B(v)}=\pi'_B(v)$.

■