הרצאה 13

נכתב על ידי יהונתן רגב

10.04.2016

תזכורת (מקרה בדיד)

(Ω, P) מרחב הסתברות בדיד.

כאשר: Ω קבוצה בת מניה ו - $P: \Omega \to \mathbb{R}^+$ כאשר:

$$\sum_{x \in \Omega} P(x) = 1$$

שאלה

איך עוברים למקרה הכללי?

פרדוקס ברטרנד

נתבונן במעגל, ונבחר מיתר אקראי במעגל.

נתבונן במשולש שווה צלעות החסום במעגל.

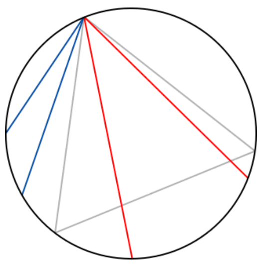
שאלה

מה הסיכוי שאורך המיתר יהיה גדול מאורך הצלע של משולש שווה הצלעות?

פתרון

1. נבחר שתי נקודות באקראי על היקף המעגל.

המחשה

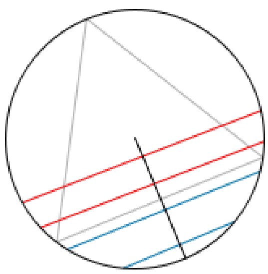


לכן:

$$P(\text{אורך המיתר} > \text{אורך הצלע}) = P(\text{הנקודה השנייה נבחרה בשליש הרחוק מהנקודה הראשונה}) = \frac{1}{3}$$

2. נבחר רדיוס אקראי, ונבחר נקודה אקראית על הרדיוס.
נעלה אנך מהנקודה – זה המיתר.

המחשה

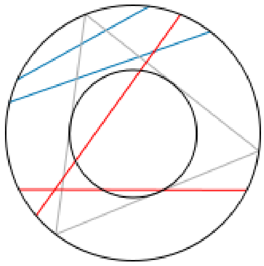


לכן:

$$P(\text{אורך המיתר}<\text{אורך הצלע}) = P(\text{הנקודה של הרדיוס קרובה למרכז כדי }\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

3. נבחר נקודה אקראית במעגל.
נעביר את המיתר היחיד שהנקודה חוצה.

המחשה



לכן:

$$P(\text{אורך המיתר}<\text{אורך הצלע}) = P(\text{הנקודה שייכת למעגל ברדיוס }\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{4}$$

■

במקרה הבדיד, הגדרנו מרחב הסתברות בתור קבוצה Ω <u>בת מניה</u> ופונקציה $P:\Omega\to\mathbb{R}$.

הכללנו את הפונקציה ל - $P:\mathbb{P}(\Omega)\to\mathbb{R}$, כאשר:

$$P(A)=\sum_{x\in A}P(x)$$

נרצה להכליל עבור Ω כלשהו.

שיטה 1

עבור Ω כלשהו, נגדיר $P:\Omega\to\mathbb{R}$, ונרחיב את הפונקציה מנקודות $x\in\Omega$ עבור מאורעות $A\subseteq\Omega$ על ידי:

$$P(A)=\sum_{x\in A}P(x)$$

בעיה

אי אפשר לסכם על קבוצה שאינה בת מניה.

אם $A\coloneqq\{x\mid P(x)\neq 0\}$ לא בת מניה, נקבל $P(A)=\infty$.

שיטה 2

עבור Ω כלשהו $P:\Omega\to\mathbb{R}$, נגדיר ישירות פונקציית הסתברות על המאורעות.

כלומר, נחפש פונקציה: $P\colon \mathbb{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$, המקיימת:

$$P([a, a+x]) = x \ ; \ 0 < a < a+x < 1$$

נתבונן במעגל היחידה: $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

נגדיר פונקציה: $P\colon P(S^1) \to \mathbb{R}$, כך ש:

1.

$$P(S^1) = 1$$

2. עבור קבוצות זרות $A_n \subseteq S^1$:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

3. הומוגניות - סיבוב ב - $z \in S^1$:

$$P(z \cdot A) = P(A)$$

נראה את הבעיה:

נגדיר על S^1 יחס שקילות ע"י:

הנקודה בזווית $\vartheta_1 \equiv$ הנקודה בזווית $\vartheta_2 \Leftrightarrow \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2\cdot\pi} \in \mathbb{Q}$.

ברור שזהו יחס טרנזיטיבי.

בכל מחלקת שקילות יש $\aleph_0$ נקודות, לכן קיימות $\aleph$ מחלקות שקילות שונות.

נגדיר קבוצה A באופן הבא:

A כוללת נציג יחיד מכל מחלקת שקילות.

בצעד זה השתמשנו באקסיומת הבחירה: אם $X_\alpha \neq \phi$,$X = \dot\bigcup X_\alpha$, אזי קיימת קבוצה $A \subseteq X$ כך ש: $|A \cap X_\alpha| = 1$.

נבחר $z \in S^1$ בזווית שהיא כפולה רציונאלית של $2 \cdot \pi$.

לפי הבנייה: $z \cdot A \cap A = \phi$.

מצד שני:

$$\bigcup_{\vartheta_z\in\mathbb{Q}} z\cdot A = S^1$$

כעת:

$$1 \stackrel{1}{=} P(S^1) = P\left(\bigcup_{\vartheta_z\in\mathbb{Q}} z\cdot A\right) \stackrel{2}{=} \sum_{\vartheta_z\in\mathbb{Q}} P(z\cdot A) \stackrel{3}{=} \sum_{\vartheta_z\in\mathbb{Q}} P(A)$$

זו סתירה בין אם $P(A)=0$ ובין אם $P(A)\neq 0$.

■

פתרון

להסכים ש – P לא תהיה מוגדרת על כל תת הקבוצות של Ω.

כלומר, יהיו קבוצות שההסתברות שלהן לא תהיה מוגדרת.

הגדרה

יהי Ω מרחב כשלהו.

σ-אלגברה על Ω היא משפחה $\mathcal{F}\subseteq\mathbb{P}(\Omega)$ של תת קבוצות שך ש:

1. מתקיים: $\Omega\in\mathcal{F}$.
2. $\mathcal{F}$ סגורה לאיחוד בן מניה:

$$\forall A_1,A_2,A_3,\dots\in\mathcal{F} : \bigcup_n A_n\in\mathcal{F}$$

3. $\mathcal{F}$ סגורה ללקיחת משלים:

$$\forall A\in\mathcal{F} : A^c\in\mathcal{F}$$

הגדרה (מרחב הסתברות לפי האקסיומות של קולמוגור)

מרחב הסתברות הוא $(\Omega,\mathcal{F},P)$, כאשר:

1. $\mathcal{F}$ היא σ-אלגברה על Ω.
2. $P:\mathcal{F}\to\mathbb{R}^+$ כך ש:
   א. $P(\Omega)=1$.
   ב. P תהיה σ-אדיטיבית, כלומר, לכל $A_1,A_2,A_3,\dots\in\mathcal{F}$ זרות:

$$P\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n P(A_n)$$

תרגיל: בהגדרת σ-אלגברה, באקסיומה 2, מספיק להניח שהקבוצות זרות. כלומר, $\mathcal{F}$ סגורה לאיחוד זר בן מניה.

תרגיל: σ-אלגברה סגורה לאיחוד סופי.

פתרון

$\phi \in \mathcal{F}$ ונבחר $A_n, A_{n+1}, \cdots = \phi$.

תרגיל: תהי $\mathcal{F}$ σ-אלגברה, ותהי $P: \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, כך ש: $P(\Omega) = 1$.

התכונות הבאות שקולות:

1. אם A_n זרות, אז:

$$P\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n P(A_n)$$

2. אם $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \cdots$, אז:

$$P\left(\bigcup_n B_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(B_n)$$

3. אם $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \cdots$, אז:

$$P\left(\bigcap_n C_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(C_n)$$

פתרון (חלקי)

$\boxed{2 \Leftarrow 1}$

נגדיר:

$$A_1 \coloneqq B_1$$

$$A_2 \coloneqq B_2 - B_1$$

$$\vdots$$

$$A_n \coloneqq B_n - B_{n-1}$$

ואלו קבוצות זרות.

לכן:

$$P\left(\bigcup_n B_n\right) = P\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n P(A_n) = \sum_{n=2}^{\infty}\big(P(B_n) - P(B_{n-1})\big) + P(B_1) = \lim_{n\to\infty} P(B_n)$$

$$\Downarrow$$

$$P\left(\bigcup_n B_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(B_n)$$

$\boxed{1 \Leftarrow 2}$

תהי A_n סדרה של קבוצות זרות.

נגדיר:

$$B_n \coloneqq A_1 \cup \cdots \cup A_n$$

לכן:

$$P\left(\bigcup_n B_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(B_n)$$

$$\Downarrow$$

$$P\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n P(A_n)$$

$\blacksquare$

דוגמה

1. לכל Ω, $\mathbb{P}(\Omega)$ היא σ-אלגברה.
2. לכל Ω, $\{\phi, \Omega\}$ היא σ-אלגברה.
3. תהי Ω מרחב. תהיינה $\mathcal{F}_\alpha$ σ-אלגברות על Ω.
   אז:
   $$\bigcap_\alpha \mathcal{F}_\alpha$$
   היא σ-אלגברה.
4. תהי $B \subseteq \mathbb{P}(\Omega)$ משפחה כלשהי של תת קבוצות.

אז, קיימת σ-אלגברה מינימלית המכילה את B.

<u>הוכחה</u>

נגדיר:

$$\bigcap \left\{ \mathcal{F} \mid \begin{matrix} B \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathbb{P}(\Omega) \\ \mathcal{F}\ \sigma - \text{אלגברה} \end{matrix} \right\}$$

■