תרגיל 7 - פתרון

שאלה 1

(1) <u>הוכחה:</u>

f רציפה ב-$[a,b]$ ולכן גם בכל קטע שמוכל ב-$[a,b]$.

יהי $P=\{x_0,\dots,x_n\}$ חלוקה כלשהי של $[a,b]$.

f רציפה ולכן אינטגרבילית בכל אחד מקטעי החלוקה.

ולכן, עפ"י משפט הערך הממוצע האינטגרלי

בקטע החלוקה ה-i $(i\in\{1,\dots,n\})$ קיים $c_i \in (x_{i-1},x_i)$

כך ש-

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = f(c_i)\Delta x_i \qquad (1)$$

אזי, מאדיטיביות האינטגרל:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx = $$

$$\overset{(1)}{=} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

כלומר -

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

מכיוון שהבחירה ב-P היתה שרירותית, הנ"ל מתקיים לכל חלוקה - כנדרש.

(2) <u>דוגמא נגדית:</u>

$$f(x)=\begin{cases} 0 & 0\le x<1 \\ 1 & x=1 \end{cases}$$ בקטע $[0,1]$.

f אינטגרבילית בקטע (רציפה פרט לנקודה אחת)! - $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$ (ודאי!)

אולם, לכל חלוקה $P=\{x_0,\dots,x_n\}$ של $[0,1]$,

מתקיים:

$$\overline{S}(P) = 1\cdot\Delta x_n = \Delta x_n = 0$$

(3) דוגמא נגדית:

$$f(x)=\begin{cases}1/x & x\in(0,1]\\ 0 & x=0\end{cases}$$ ב-$[0,1]$.

f מוגדרת ב-$[0,1]$ ורציפה ב-$(0,1]$ אך אינה חסומה ב-$[0,1]$, ולכן אינה אינטגרבילית בקטע $[0,1]$.

שאלה 2

(1) (א) לכל x בקטע $[0,1]$ $|\cos x|\le 1$

וגם x בקטע $(1,3]$ $|x-2|\le 1$

ולכן, לכל x ב-$[0,3]$ מתקיים $|f(x)|\le 1$, כלומר: f חסומה בקטע.

בנוסף, f רציפה בקטע - פרט, אולי, לשתי נקודות $x=0,1$

ולכן f אינטגרבילית ב-$[0,3]$.

(ב)

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}|x-2| = 1$$

$$\ne$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\cos x = \cos 1$$

$\cos 1\ne 1$, ולכן ל-f יש אי רציפות ממין ראשון ב-$x=1$.

נניח בשלילה כי ל-f יש פונקציה קדומה בקטע, נסמנה: F.

לכן, לכל x ב-$[0,3]$: $F'(x)=f(x)$ וקיבלנו כי ל-F' יש רק אי רציפות ממין ראשון בקטע - והמשפט שקובע כי אי רציפות של נגזרת של פונקציה גזירה בקטע סגור הן ממין <u>שני</u> בלבד.

לכן - ל-f <u>אין</u> פונקציה קדומה ב-$[0,3]$.

(ג) לכל $0\le x\le 1$:

$$F(x)=\int_0^x \cos t\,dt=\sin t\Big|_0^x=\sin x$$

שכן, $f(x)=\cos x$ רציף בקטע $[0,1]$, שבה הקצה $x=0$.

עבור $1<x\le 2$:

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^1 f(t)dt+\int_1^x f(t)dt=$$

$$\xrightarrow{\text{לפי המשפט היסודי של החדו"א}}=F(1)-F(0)+\int_1^x (2-t)\,dt=\sin 1+\left(2t-\frac{t^2}{2}\right)\Big|_1^x=$$

$$=\sin 1+2x-\frac{x^2}{2}-2+\frac{1}{2}=\sin 1-\frac{3}{2}+2x-\frac{x^2}{2}.$$

עבור $2<x\le 3$:

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^2 f(t)dt+\int_2^x f(t)dt=$$

$$=F(2)+\int_2^x (t-2)dt=\sin 1-\frac{3}{2}+4-2+\left(\frac{t^2}{2}-2t\right)\Big|_2^x=$$

$$=\sin 1+\frac{1}{2}+\frac{x^2}{2}-2x-2+4=\sin 1+2.5+\frac{x^2}{2}-2x.$$

קיבלנו כי:

$$F(x)=\begin{cases}\sin x & 0\le x\le 1\\ \sin 1-1.5+2x-\frac{x^2}{2} & 1<x\le 2\\ \sin 1+2.5+\frac{x^2}{2}-2x & 2<x\le 3\end{cases}$$

(ד)

$$f(x)=\begin{cases}1-x & 0\le x\le 1\\ x-1 & 1<x\le 4\end{cases}$$

כאמור לעיל כמו בסעיף (1)(ב) - f אינטגרבילית ב-$[0,4]$, ויש לה פונקציה קדומה רציפה :

$$F(x)=\begin{cases}x-\frac{x^2}{2} & 0\le x\le 1\\ 1+\frac{x^2}{2}-x & 1<x\le 4\end{cases}$$

כעת, לפי המשפט היסודי :

$$\int_0^4 f(x)dx=F(4)-F(0)=1+\frac{16}{2}-4-\left(0-\frac{0^2}{2}\right)=5.$$