

## מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

19 ביוני 2016

### תרגיל 9 - אי- שיויונים, פונקציות יוצרות מומנטים ומשפט הגבול המרכזי

1. כדי לעלות לקומה ב' יש לעלות 49 מדרגות. בכל דקה אדם מטיל קוביה תקינה ועולה מספר מדרגות השווה לתוצאת הקוביה. מצאו חסם עליון להסתברות שאותו אדם יגיע לקומה ב' תוך 12 דקות. הניחו שההטלות השונות הן ב"ת (השתמשו באי שיויון צ'ביצ'ב).

2. קבעו האם קיים מ"מ  $X$ , המקיים:  $E[X] = 4$ ,  $V[X] = 5$  ו-  $P(X = 9) = 0.5$  (השתמשו באי שיויון צ'ביצ'ב).

3. חשבו (הראו את החישוב מפורשות לא מספיק לרשום את התוצאה) את הפונקציה יוצרת המומנטים של המשתנים הבאים:

(א) המשתנה המקרי האחד (=בעל התפלגות אחידה) הבדיד המקבל ערכים בין  $a$  ל-  $b$  (כולל).

(ב) המשתנה המקרי האחד הרציף המקבל ערכים בין  $a$  ל-  $b$  (כולל).

4. יהיו  $X, Y, Z$  משתנים מקריים ב"ת, כאשר  $X$  משתנה מקרי ברנולי עם פרמטר  $\frac{1}{3}$ ,  $Y$  משתנה מקרי מעריכי עם פרמטר 2 ו-  $Z$  משתנה מקרי פואסוני עם פרמטר 3.

(א) מצאו את הפונקציה יוצרת המומנטים של המשתנה המקרי  $U = XY + (1 - X)Z$ .

(ב) מצאו את הפונקציה יוצרת המומנטים של המשתנה המקרי  $2Z + 3$ .

(ג) מצאו את הפונקציה יוצרת המומנטים של המשתנה המקרי  $Y + Z$ .

5. יהי  $X$  משתנה מקרי אי-שלילי המקבל ערכים שלמים. ידוע שהפונקציה יוצרת המומנטים של  $X$  היא אחת מהפונקציות הבאות:

$$M_2(s) = e^{2(e^{e^s} - 1)}, M_1(s) = e^{2(e^{e^s - 1} - 1)}$$

(א) הסבירו מדוע אחת מהפונקציות אינה יכולה להיות פונקציה יוצרת מומנטים.

(ב) השתמשו בפונקציה יוצרת המומנטים האמיתית (זו שלא נפסלה) על מנת

לחשב את  $P(X = 0)$  (רמז: למה שווה  $\lim_{s \rightarrow -\infty} M(s)$ ?).

6. יהי  $X$  משתנה מקרי אי-שלילי המקבל ערכים שלמים. ידוע שהפונקציה יוצרת

המומנטים של  $X$  היא:  $M_X(s) = c \cdot \frac{3 + e^{2s} + 2e^{3s}}{3 - e^s}$ . (c סקלר).

מצאו את  $E[X]$  את  $P(X = 1)$ ,  $P(X = 0)$  ואת  $E[X|X \neq 0]$ .

רמז: ניתן להניח ש  $e^s < 3$  ולהסתכל על  $M_X(s)$  בסביבה הזו (בטאו תחת תנאי

זה את  $M_X(s)$  בצורה  $M_X(s) = \sum a_k e^{ks}$  וחשבו את  $P(X = 1)$ ,  $P(X = 0)$  ע"י מציאת המקדמים המתאימים בטור)

7. ב-120 חממות בצפון הארץ מגדלים עגבניות. ידוע כי תוחלת יבול העגבניות

מחממה אחת היא 1.2 טון וסטטיית התקן היא 0.4 טון.

(א) מה ההסתברות שיבול העגבניות הכולל מ-120 החממות יהיה גדול מ-140

טון?

(ב) ברמת הגולן 30 חממות. המדריך החקלאי באזור מעריך כי היבול הממוצע

לחממה ברמת הגולן הוא לפחות 1.5 טון. בהסתמך על נתוני השאלה, מה

הסיכוי שהמדריך צודק?

(ג) בעקבות מיתון נוסף הוחלט במשרד החקלאות לסגור את כל החממות בהן

יבול העגבניות קטן מטון. מהי ההסתברות שתסגרנה 12 חממות לפחות

בהנחה שהיבול מתפלג נורמלית עם הפרמטרים מתחילת השאלה?

8. משקל פיתה במאפייה המרכזית מתפלג נורמלית עם תוחלת 100 גר' וסטיית תקן 5 גר'. הפיתות נארזות בחבילות של 30 יחידות ונשלחות למרכז שווארמה הארצי. בהנחה שמשקלי הפיתות בלתי-תלויים:

(א) חשבו את ההסתברות שמשקל פיתה שנבחרה באקראי נמוך מ-97 אך גדול מ-95 גר'.

(ב) משרד המסחר דורש שלא יותר מ-10% מהפיתות יהיו בעלות משקל נמוך מ-95 גר'.

האם מאפייה עומדת בתקן? מה צריך להיות ערכה של סטיית התקן ע"מ לעמוד בתקן?

(ג) חשבו את ההסתברות שמשקל חבילת פיתות נמוך מ-2950 גר'.

(ד) מרכז השווארמה קיבל הזמנה להספקת 16 פיתות עם חומוס ומלפפון חמוץ מתלמידי שנה א במחלקה למתמטיקה בבר אילן. משקל חומוס בכל פיתה מתפלג נורמלית עם תוחלת 50 גר' וסטיית תקן 3 גר'. כל מלפפון עובר בדיקה ק פדנית אצל בעל מרכז השווארמה ומוכנס לפיתה רק במידה ומשקלו 20 גר'. נישאים על גלי ההתלהבות מהקורס בסטטיסטיקה, הסטודנטים החליטו לחשב את משקלן הממוצע של הפיתות שקיבלו. מה ההסתברות שהוא יעלה על 171.5 גר'?

9. עקר בית מנהל רישום מסודר של כל ההמחאות שרשם בחודש מסויים כאשר הוא מעגל לשקל הקרוב את סכום כ"א ההמחאות. תהי  $X_j$  שגיאת העיגול של ההמחאה ה- $j$ . הניחו כי  $X_j \sim U(-0.5, 0.5)$

(א) מהי ההסתברות שסך כל השגיאה ב-12 ההמחאות שרשם עקר הבית באותו חודש גדולה משקל אחד?

(ב) מהי ההסתברות שהסטייה (הערך המוחלט של הפרש) בין הסכום המדויק לבין הסכום המעוגל של 12 ההמחאות קטנה או שווה לשני שקלים?