תרגיל 5 טופולוגיה

בכל התרגיל אתם מתבקשים לנמק את צעדיכם ככל האפשר.

1. (א) תהי X קבוצה עם הטופולוגיה הקו־סופית. נניח שיש קבוצה $A \neq \emptyset, X$ שהיא סגוחה. הוכיחו כי X סופית.

   (ב) יהי (X,τ) מרחב טופולוגי אינסופי. נניח שהקבוצה הפתוחה האינסופית היחידה היא X. האם (X,τ) היא הטופולוגיה הטריויאלית? (למחשבה: האם יש דוגמא כזאת שבה יש אינסוף קבוצות פתוחות?)

2. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי. הוכיחו כי התנאים הבאים שקולים:

   (א) הטופולוגיה טריויאלית.

   (ב) לכל סדרה x_n ו $x \in X$ מתקיים $x_n \to x$ (כל סדרה מתכנסת לכל מספר)

3. (א) יהי $X = \{a,b\}$ עם הטופולוגיה $\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ (כזכור זהו מרחב Sierpiński). מצאו את כל הסדרות המתכנסות לאיבר אחד ואת כל הסדרות המתכנסות לשני איברים.

   (ב) תהי X קבוצה אינסופית עם הטופולוגיה הקו־סופית. נניח ש x_n היא סדרה שכל איבריה שונים. הוכיחו כי היא מתכנסת לכל $x \in X$. (הסיקו כי מרחב קו־סופי הוא מטריזבילי אם ורק אם הוא סופי).

4. תהי $f : (X,\tau_1) \to (Y,\sigma_1)$ פונקציה רציפה בין 2 מרחבים טופולוגיים. נניח כי $\tau_1 \subseteq \tau_2$ ו $\sigma_2 \subseteq \sigma_1$. הוכיחו כי

$$f : (X,\tau_2) \to (Y,\sigma_2)$$

היא גם רציפה. (על אותו עקרון, שימו לב לעובדה הבאה: כל פונקציה לתוך מרחב טריויאלי היא רציפה. כל פונקציה מתוך מרחב דיסקרטי היא רציפה).

5. הוכיחו: מרחב מטרי X מקיים את תכונה T_1 אם ורק אם כל נקודון (קבוצה עם איבר אחד) היא קבוצה סגורה.

6. איזה מבין אקסיומות ההפרדה T_0, T_1, T_2 מקיים:

   (א) מרחב Sierpiński?

   (ב) מרחב קו־סופי (על קבוצה X אינסופית)?

7. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי. עבור קבוצה $A \subseteq X$ נגדיר את הפונקציה $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ שנקראת הפונקציה האופיינית של A לפי

$$\chi_A = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

הוכיחו כי X קשירה אם ורק אם לכל $A \subseteq X$ (למעט $\emptyset, X$) הפונקציה χ_A אינה רציפה.

8. יהי X מרחב טופולוגי ויהיו $A,B,C \subseteq X$ תתי קבוצות כך ש $C \subseteq A \cup B$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות.

(א) אם C פתוחה ב $A \cup B$ אז $A \cap C$ פתוחה ב A ו $B \cap C$ פתוחה ב B.

(ב) אם $A \cap C$ פתוחה ב A ו $B \cap C$ פתוחה ב B אז C פתוחה ב $A \cup B$.

9. (א) יהי X מרחב טופולוגי. ניקח תתי קבוצות $Z \subseteq Y \subseteq X$. הטופולוגיה של X משרה טופולוגיות תת מרחב על Y וזו משרה טופולוגית תת מרחב על Z. הראו שזו בדיוק טופולוגית תת המרחב ש X משרה על Z (אם הטענה הזאת הייתה לא נכונה היה מאוד קשה לדבר על תתי מרחבים).

(ב) הוכיחו כי טופולוגית תת מרחב של טופולוגיה קו־סופית היא בעצמה טופולוגיה קו־סופית.