

מבוא לאלגברה לינארית - תרגיל 3 - מרחבים ווקטורים

שאלה 1. הוכיחו ש- $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$ הוא מרחב ווקטור ביחס לפעולות

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \\ \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} \end{cases}$$

פתרון.

• חיבור

- סגירות- יהיו $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in V$ אז

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \in V$$

- אסוציאטיביות - יהיו $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \in V$

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (x_1 + x_2) + x_3 \\ (y_1 + y_2) + y_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + (x_2 + x_3) \\ y_1 + (y_2 + y_3) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ y_2 + y_3 \end{pmatrix} \right) =$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) =$$

- קומוטטיביות- יהיו $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in V$ אז

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + x_1 \\ y_2 + y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

- איבר נייטרלי- יהיו $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in V$ אז

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 0 \\ y + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- קיום נגדי- לכל $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in V$ ניקח את $\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \in V$ כהאיבר הנגדי.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + (-x) \\ y + (-y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

• כפל בסקלר

- סגירות- יהיו $\alpha \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in V$ אז

$$\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} \in V$$

- אסוציאטיביות- יהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in V$ אז

$$(\alpha\beta) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha\beta)x \\ (\alpha\beta)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(\beta x) \\ \alpha(\beta y) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \beta x \\ \beta y \end{pmatrix} = \alpha \left(\beta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$$

- פילוג בסקלר- יהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in V$ אז

$$(\alpha + \beta) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha + \beta)x \\ (\alpha + \beta)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x + \beta x \\ \alpha y + \beta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta x \\ \beta y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- פילוג בוקטורים- יהיו $\alpha \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in V$ אז

$$\alpha \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) =$$

$$\alpha \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \alpha(x_1 + x_2) \\ \alpha(y_1 + y_2) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \alpha x_1 + \alpha x_2 \\ \alpha y_1 + \alpha y_2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha x_2 \\ \alpha y_2 \end{pmatrix} =$$

$$\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

- סקלר היחידה- יהיו $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in V$, $1 \in \mathbb{R}$ אז

$$1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x \\ 1y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

שאלה 2. הוכיחו ש- $V = \mathbb{R}^{2 \times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$ מעל \mathbb{R} הוא מרחב ווקטור ביחס לפעולות

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} \\ \alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix} \end{cases}$$

פתרון.

• חיבור

- סגירות- יהיו $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in V$ אז

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} \in V$$

- אסוציאטיביות - יהיו $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \in V$ יהיו

$$\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (a_{11} + b_{11}) + c_{11} & (a_{12} + b_{12}) + c_{12} \\ (a_{21} + b_{21}) + c_{21} & (a_{22} + b_{22}) + c_{22} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} + (b_{11} + c_{11}) & a_{12} + (b_{12} + c_{12}) \\ a_{21} + (b_{21} + c_{21}) & a_{22} + (b_{22} + c_{22}) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (b_{11} + c_{11}) & (b_{12} + c_{12}) \\ (b_{21} + c_{21}) & (b_{22} + c_{22}) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \right)$$

- קומוטטיביות- יהיו $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in V$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} + a_{11} & b_{12} + a_{12} \\ b_{21} + a_{21} & b_{22} + a_{22} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

- איבר נייטרלי- יהיו $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in V$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + 0 & a_{12} + 0 \\ a_{21} + 0 & a_{22} + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

- קיום נגדי- לכל $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in V$ ניקח את $\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix} \in V$ כהאיבר הנגדי.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - a_{11} & a_{12} - a_{12} \\ a_{21} - a_{21} & a_{22} - a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

• כפל בסקלר

- סגירות- יהיו $\alpha \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in V$

$$\alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix} \in V$$

- אסוציאטיביות- יהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in V$

$$(\alpha\beta) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (\alpha\beta) a_{11} & (\alpha\beta) a_{12} \\ (\alpha\beta) a_{21} & (\alpha\beta) a_{22} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \alpha(\beta a_{11}) & \alpha(\beta a_{12}) \\ \alpha(\beta a_{21}) & \alpha(\beta a_{22}) \end{pmatrix} =$$

$$\alpha \begin{pmatrix} \beta a_{11} & \beta a_{12} \\ \beta a_{21} & \beta a_{22} \end{pmatrix} =$$

$$\alpha \left(\beta \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right)$$

- פילוג בסקלר- יהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in V$

$$(\alpha + \beta) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (\alpha + \beta)a_{11} & (\alpha + \beta)a_{12} \\ (\alpha + \beta)a_{21} & (\alpha + \beta)a_{22} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \alpha a_{11} + \beta a_{11} & \alpha a_{12} + \beta a_{12} \\ \alpha a_{21} + \beta a_{21} & \alpha a_{22} + \beta a_{22} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta a_{11} & \beta a_{12} \\ \beta a_{21} & \beta a_{22} \end{pmatrix} =$$

$$\alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

- פילוג בווקטורים- יהיו $\alpha \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in V$

$$\alpha \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right) =$$

$$\alpha \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \alpha(a_{11} + b_{11}) & \alpha(a_{12} + b_{12}) \\ \alpha(a_{21} + b_{21}) & \alpha(a_{22} + b_{22}) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \alpha a_{11} + \alpha b_{11} & \alpha a_{12} + \alpha b_{12} \\ \alpha a_{21} + \alpha b_{21} & \alpha a_{22} + \alpha b_{22} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha b_{11} & \alpha b_{12} \\ \alpha b_{21} & \alpha b_{22} \end{pmatrix} =$$

$$\alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

- סקלר היחידה- יהיו $1 \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in V$

$$1 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1a_{11} & 1a_{12} \\ 1a_{21} & 1a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

שאלה 3. הוכיחו ש- $V = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} : z \in \mathbb{C} \right\}$ מעל \mathbb{R} הוא מרחב ווקטור ביחס לפעולות

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \\ \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} \end{cases}$$

פתרון.

• חיבור

- סגירות- יהיו $\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w \\ \bar{w} \end{pmatrix} \in V$ אז

$$\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w \\ \bar{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z+w \\ \bar{z}+\bar{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z+w \\ z+w \end{pmatrix} \in V$$

- אסוציאטיביות - יהיו $\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w \\ \bar{w} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ \bar{t} \end{pmatrix} \in V$

$$\left(\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w \\ \bar{w} \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} t \\ \bar{t} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} z+w \\ \bar{z}+\bar{w} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ \bar{t} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (z+w)+t \\ (\bar{z}+\bar{w})+\bar{t} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} z+(w+t) \\ \bar{z}+(\bar{w}+\bar{t}) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w+t \\ \bar{w}+\bar{t} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} w \\ \bar{w} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ \bar{t} \end{pmatrix} \right)$$

- קומוטטיביות- יהיו $\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w \\ \bar{w} \end{pmatrix} \in V$ אז

$$\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w \\ \bar{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z+w \\ \bar{z}+\bar{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w+z \\ \bar{w}+\bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ \bar{w} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}$$

- איבר נייטרלי- יהיו $\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{0} \end{pmatrix} \in V$ אז

$$\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z+0 \\ \bar{z}+\bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}$$

- קיום נגדי- לכל $\begin{pmatrix} 0 \\ \bar{0} \end{pmatrix} \in V$ ניקח את $\begin{pmatrix} -z \\ -\bar{z} \end{pmatrix} \in V$ כהאיבר הנגדי.

$$\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z \\ -\bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z-z \\ \bar{z}-\bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{0} \end{pmatrix}$$

• כפל בסקלר

- סגירות- יהיו $\alpha \in \mathbb{F}, \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} \in V$ אז

$$\alpha \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha z \\ \alpha \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha z \\ \overline{\alpha z} \end{pmatrix} \in V$$

- אסוציאטיביות- יהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{F}, \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} \in V$ אז

$$(\alpha\beta) \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha\beta)z \\ (\alpha\beta)\bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(\beta z) \\ \alpha(\beta\bar{z}) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \beta z \\ \beta\bar{z} \end{pmatrix} = \alpha \left(\beta \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} \right)$$

- פילוג בסקלר- יהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{F}, \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} \in V$ אז

$$(\alpha + \beta) \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha + \beta)z \\ (\alpha + \beta)\bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha z + \beta z \\ \alpha\bar{z} + \beta\bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha z \\ \alpha\bar{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta z \\ \beta\bar{z} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}$$

- פילוג בווקטורים- יהיו $\alpha \in \mathbb{F}, \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w \\ \bar{w} \end{pmatrix} \in V$ אז

$$\alpha \left(\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w \\ \bar{w} \end{pmatrix} \right) = \alpha \begin{pmatrix} z+w \\ \bar{z}+\bar{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(z+w) \\ \alpha(\bar{z}+\bar{w}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha z + \alpha w \\ \alpha\bar{z} + \alpha\bar{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha z \\ \alpha\bar{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha w \\ \alpha\bar{w} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} w \\ \bar{w} \end{pmatrix}$$

- סקלר היחידה- יהיו $1 \in \mathbb{F}, \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} \in V$ אז

$$1 \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1z \\ 1\bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}$$

שאלה 4. האם הקבוצות הבאות הן תתי מרחבים?

1. האם $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : y = x \right\}$ (אתגר- נסו לחשוב מה הצורה הזאת מתארת)

הוא תת מרחב ווקטורי של \mathbb{R}^3 ביחס לחיבור וכפל בסקלר הרגילים?

פתרון.

כן, הוא תת מרחב, יהיו $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in W, \alpha \in \mathbb{R}$ אז

$$u + \alpha v = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + \alpha x_2 \\ y_1 + \alpha y_2 \\ z_1 + \alpha z_2 \end{pmatrix}$$

ומתקיים

$$y_1 + \alpha y_2 = x_1 + \alpha x_2$$

מכיוון ש- $x_1 = y_1, x_2 = y_2$ לכן

$$u + \alpha v \in W$$

אוסף כל הנקודות ב- \mathbb{R}^3 עם תנאי לינארי מתאר מישור כלומר $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : y = x \right\}$

מתארים מישורים ב- \mathbb{R}^3

2. האם $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : z = 2y + 3, y = x \right\}$ (אתגר- נסו לחשוב מה הצורה

הזאת מתארת) הוא תת מרחב ווקטורי של \mathbb{R}^3 ביחס לחיבור וכפל בסקלר הרגילים?

פתרון.

לא, הוא לא תת מרחב ווקטורי, ניקח

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \in W, v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \in W$$

אך החיבור

$$u + v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} \notin W$$

אוסף כל הנקודות ב- \mathbb{R}^3 עם שני תנאים לינארים מתאר את ישר חיתוך בין שני המישורים (אם קיים) כלומר

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : z = 2y + 3, y = x \right\}$$

מתאר את ישר החיתוך בין שני המישורים

3. האם $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : z^2 = x^2 + y^2 \right\}$ (אתגר- נסו לחשוב מה הצורה הזאת מתארת)

הוא תת מרחב ווקטורי של \mathbb{R}^3 ביחס לחיבור וכפל בסקלר הרגילים?

פתרון.

לא תת מרחב, ניקח

$$u = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \in V, v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \in W$$

אך החיבור

$$u + v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \notin W$$

הצורה הזאת היא קונוס

4. האם $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x^2 + y^2 + z^2 \leq 36 \right\}$ (אתגר- נסו לחשוב מה הצורה הזאת

מתארת) הוא תת מרחב ווקטורי של \mathbb{R}^3 ביחס לחיבור וכפל בסקלר הרגילים?

פתרון.

לא תת מרחב, ניקח

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in W$$

אך עם נכפיל ב-6 נקבל

$$6u = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \notin W$$

הצורה הזאת כדור (עם הפנים) בעל רדיוס 6

5. האם $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 2^{3x+z} = 8^{2x-y} \right\}$ הוא תת מרחב ווקטורי של \mathbb{R}^3 ביחס לחיבור וכפל בסקלר הרגילים?

פתרון.

כן, הוא תת מרחב, ראשית נשים לב ש-

$$\begin{aligned} 2^{3x+z} &= 8^{2x-y} \\ \Downarrow \\ 2^{3x+z} &= 8^{6x-3y} \\ \Downarrow \\ 3x+z &= 6x-3y \\ \Downarrow \\ 3x-3y-z &= 0 \end{aligned}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 3x - 3y - z = 0 \right\} \text{ לכן}$$

$$\forall u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \in W, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in W, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$u + \alpha v = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + \alpha v_1 \\ u_2 + \alpha v_2 \\ u_3 + \alpha v_3 \end{pmatrix}$$

ומתקיים

$$\begin{aligned} 3(u_1 + \alpha v_1) - 3(u_2 + \alpha v_2) - (u_3 + \alpha v_3) &= \\ 3u_1 - 3u_2 - u_3 + \alpha(3v_1 - 3v_2 - v_3) &= \\ 0 + \alpha \cdot 0 &= \\ 0 & \end{aligned}$$

לכן $u + \alpha v \in W$

6. האם $W = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : a_{12} = a_{21} = 0 \right\}$ ביחס לחיבור וכפל בסקלר הרגילים?

פתרון.

$$\forall A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in W, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$u + \alpha v = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + \alpha b_{11} & a_{12} + \alpha b_{12} \\ a_{21} + \alpha b_{21} & a_{22} + \alpha b_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11} + \alpha b_{11} = 0 + \alpha 0 = 0 \\ a_{22} + \alpha b_{22} = 0 + \alpha 0 = 0 \end{cases}$$

ומתקיים

לכן $A + \alpha B \in W$

בהצלחה!!