פתרון תרגיל 10 אינפי 1 מדמ"ח תשע"ז

12 בינואר 2017

1. נתרגם את הטענות לשפת האינפיניטסימלים, ונסביר את משמעותן.

(א) לכל ε אינפיניטסימל שלילי, $f\left(c+\varepsilon\right)$ אינסופי חיובי. המשמעות היא $\lim\limits_{x\longrightarrow c^{-}}f\left(x\right)=\infty$.

(ב) קיים H אינסופי חיובי עבורו $f\left(H\right)$ אינו אינסופי שלילי. המשמעות היא $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}f\left(x\right)\neq\infty$.

(ג) קיימים $x,y\in I*$ המקיימים $x\approx y$ אך $f\left(x\right)\not\approx f\left(y\right)$. המשמעות היא ש־$f$ אינה רבמ"ש בקטע I.

2. יהי $M>0$ ממשי. נחפש $\delta>0$ ממשי עבורו אם $2-\delta<x<2$ אז:

$$\frac{5}{\sqrt{2-x}}>M$$

אם כן, נקבל:

$$\frac{5}{M}>\sqrt{2-x}$$

ולכן:

$$\frac{25}{M^{2}}>2-x\Longrightarrow2-\frac{25}{M^{2}}<x$$

ואנו רוצים שזה יתקיים כאשר $2-\delta<x$, ולכן נבחר:

$$\delta=\frac{25}{M^{2}}$$

3. נשתמש באינפיניטסימלים.

(א) נתבונן בשני אינסופיים חיוביים: $x=\sqrt{H}, y=\sqrt{H+1}$. מצד אחד:

$$y-x=\sqrt{H+1}-\sqrt{H}=\left(\sqrt{H+1}-\sqrt{H}\right)\cdot\frac{\sqrt{H+1}+\sqrt{H}}{\sqrt{H+1}+\sqrt{H}}=\frac{1}{\sqrt{H+1}+\sqrt{H}}$$

מכיוון שהמכנה אינסופי, אכן $y\approx x$.

מצד שני:

$$f(y)-f(x)=\left(\sqrt{H+1}\right)^2-\left(\sqrt{H}\right)^2=H+1-H=1\neq 0$$

ולכן $f(x)\not\approx f(y)$, והפונקציה לא רבמ"ש.

(ב) נתבונן בשני אינסופיים חיוביים: $x=\ln H, y=\ln(H+1)$. מצד אחד:

$$y-x=\ln(H+1)-\ln H=\ln\left(\frac{H+1}{H}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{H}\right)\approx\ln 1=0$$

מכיוון ש: $\frac{1}{H}\approx 0$, ואכן $y\approx x$.

מצד שני:

$$f(y)-f(x)=e^{\ln(H+1)}-e^{\ln H}=H+1-H=1\neq 0$$

ולכן $f(x)\not\approx f(y)$, והפונקציה לא רבמ"ש.

(ג) נתבונן בגבולות בנקודה $x=2$:

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-}f(x)=\lim_{x\longrightarrow 2^-}\left(x^2+2\right)=6$$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^+}f(x)=\lim_{x\longrightarrow 2^+}3x=6$$

הגבולות החד־צדדיים קיימים ושווים לערך בנקודה ולכן הפונקציה רציפה בנקודה $x=2$.

קל לראות שהפונקציה רציפה בכל אחת מהנקודות האחרות בקטע $[0,4)$.

כעת, נתבונן בפונקציה:

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & 0\leq x<4 \\ 12 & 4\end{cases}$$

הפונקציה g רציפה בקטע $[0,4]$ ולכן לפי משפט קנטור גם רבמ"ש.

לכן g רבמ"ש בתת הקטע $[0,4)$, ולכן f רבמ"ש בקטע $[0,4)$.

(ד) נתבונן באינסופיים חיוביים $x=\sqrt{2\pi H}, y=\sqrt{2\pi H+\frac{\pi}{2}}$ כאשר H היפר־טבעי. מצד אחד:

$$y-x=\sqrt{2\pi H+\frac{\pi}{2}}-\sqrt{2\pi H}=\left(\sqrt{2\pi H+\frac{\pi}{2}}-\sqrt{2\pi H}\right)\frac{\sqrt{2\pi H+\frac{\pi}{2}}+\sqrt{2\pi H}}{\sqrt{2\pi H+\frac{\pi}{2}}+\sqrt{2\pi H}}=$$

$$=\frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2\pi H+\frac{\pi}{2}}+\sqrt{2\pi H}}\approx 0$$

מכיוון שהמכנה אינסופי, ואכן $x\approx y$.

מצד שני:

$$f(y)-f(x)=\cos\left(\left(\sqrt{2\pi H+\frac{\pi}{2}}\right)^2\right)-\cos\left(\left(\sqrt{2\pi H}\right)^2\right)=\cos\left(2\pi H+\frac{\pi}{2}\right)-\cos 2\pi H=-1$$

ולכן $f(x)\not\approx f(y)$ והפונקציה לא רבמ"ש.

(ה) עבור H אינסופי, נתבונן באינפיניטסימלים: $x=e^{-H}, y=e^{-H-1}$. מכיוון ששניהם אינפיניטסימלים, אכן $x\approx y$.

מצד שני,

$$f(y)-f(x)=\ln\left(e^{-H-1}\right)-\ln\left(e^{-H}\right)=-H-1+H=-1$$

ולכן $f(x)\not\approx f(y)$ והפונקציה לא רבמ"ש.

(ו) נניח בשלילה שהפונקציה רציפה במ"ש. לכן, גם הפונקציה $f\circ f$ רבמ"ש (כהרכבה של פונקציות רבמ"ש), אך:

$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f\left(x^{\sqrt{2}}\right)=\left(x^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}=x^2$$

וכמו שראינו, הפונקציה x^2 אינה רבמ"ש בתחום, וסתירה.

לכן הפונקציה אינה רבמ"ש.

4. יהי $\varepsilon>0$, ונחפש $\delta>0$ כך שאם $|x-y|<\delta$ אז:

$$|f(x)+g(x)-(f(y)+g(y))|<\varepsilon$$

מכיוון שהפונקציות f, g רבמ"ש, קיימים δ_1, δ_2 כך שאם $|x-y| < \delta_1, \delta_2$ אז:

$$|f(x) - f(y)|, |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

כעת, עבור $\delta < \delta_1, \delta_2$ יתקיים:

$$|f(x) + g(x) - f(y) - g(y)| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

לפי אי־שוויון המשולש, כנדרש.