פתרון תרגיל 8 חדו"א 2 למורים באר שבע תש"ף

2 ביולי 2020

1. בכל סעיף זהו סכום רימן של פונקציה f אינטגרבילית בקטע $[0,1]$ עם החלוקה $\left\{\frac{k}{n} \mid 0 \leq k \leq n\right\}$, ולכן הגבול שווה לאינטגרל $\int_0^1 f$.

(א) כאן, $f = x^2$:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

(ב) כאן, $f = \frac{1}{x+1}$:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k+n} = \lim_{n\longrightarrow\infty} n\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\frac{k}{n}+1} = \lim_{n\longrightarrow\infty} n\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

כעת, n שואף לאינסוף והסכום כפול $\frac{1}{n}$ שואף ל-$\int_0^1 f$ שהוא מספר חיובי, ולכן הגבול הוא ∞.

(ג) כאן, $f = x\sin x$:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}\sin\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 x\sin x dx =$$

מחשבים בחלקים: $u = x, v' = \sin x$ ובסופו של דבר מקבלים: $\sin 1 - \cos 1$.

(ד) כאן, $f = e^{x+1}$:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt[n]{e^{n+k}}}{n} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{1+\frac{k}{n}} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 e^{x+1}dx = e^2 - e$$

(ה) כאן, $f = \frac{1}{x^2+3x+2}$:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{k^2}{n}+3k+2n} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^2+3\frac{k}{n}+2} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) =$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2}dx = \ln 4 - \ln 3$$

עם שברים חלקיים: $\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$.

2. כאן גם במונה וגם במכנה יש סכום:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{n+k}}{\sum_{k=1}^n \sqrt{k}} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{1+\frac{k}{n}}}{\sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}}} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \sqrt{1+\frac{k}{n}}}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}}} =$$

כפלנו מונה ומכנה ב־$\frac{1}{n}$. במונה זהו סכום רימן של $\sqrt{1+x}$, במכנה של $\sqrt{x}$ ולכן:

$$= \frac{\int_0^1 \sqrt{1+x}dx}{\int_0^1 \sqrt{x}dx} = 1.828$$