פתרון תרגיל 8

.1

1.א. נתונה סדרת הפונקציות $f_n(x)=\frac{1}{1+2^n x^n}$ בקטע $[1,2]$. עבור x קבוע בקטע $[1,2]$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+2^n x^n}\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+2^n}=0$$

לכן הסדרה מתכנסת באופן נקודתי ל- $f\equiv 0$. סדרת הפונקציות גם מתכנסת במידה שווה, אפשר

להראות זאת בדיוק כמו שהראינו התכנסות נקודתית ושימוש בכך ש- $\sup\limits_{1\le x\le 2}\left|\frac{1}{1+2^n x^n}\right|=\frac{1}{1+2^n}$.

ב. נתונה סדרת הפונקציות $f_n(x)=\frac{1}{1+2^n x^n}$ בקטע $\left[\frac{1}{2},2\right]$. נניח x מספר קבוע בקטע $\left[\frac{1}{2},2\right]$,

אם $\frac{1}{2}<x\le 2$ אז הביטוי $2x$ הוא שבר שגדול מאחד ולכן $2^n x^n\to\infty$ כאשר $n\to\infty$. לכן

עבור $\frac{1}{2}<x\le 2$ נקבל:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+2^n x^n}=0.$$

אם $x=\frac{1}{2}$ אז

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+2^n\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

לכן קיבלנו ש-

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+2^n x^n}=\begin{cases}0, & \frac{1}{2}<x\le 2\\ \frac{1}{2}, & x=\frac{1}{2}\end{cases}.$$

כיוון שקיבלנו שסדרת הפונקציות הרציפות $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית לפונקציה לא רציפה נובע

שההתכנסות היא לא במידה שווה.

ג. נתונה סדרת הפונקציות $f_n(x)=nxe^{-n^2x}$ כאשר $0\le x<\infty$. כדי לחשב התכנסות נקודתית נבדיל בין שני מקרים. אם $x=0$ אז

$$.\lim_{n\to\infty} f_n(0)=\lim_{n\to\infty} 0=0$$

אם $x>0$ אז

$$\lim_{n\to\infty} nxe^{-n^2x}=x\lim_{n\to\infty}\frac{n}{e^{n^2x}}=0$$

כאשר במעבר האחרון השתמשנו בכך ש- n הוא ביטוי אלגברי ו- e^{n^2x} הוא ביטוי מעריכי עבור $x>0$.

לכן סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית לאפס. נבדוק התכנסות במידה שווה, לכן קודם נמצא את הערך המקסימלי של הפונקציה $f_n(x)$ לכל n. ע"י גזירה נקבל

$$f_n'(x)=ne^{-n^2x}\left(1-n^2x\right)$$

אם נשווה לאפס ונחלץ את x נקבל $x=\frac{1}{n^2}$ ואז $f_n\left(\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{n}e^{-1}$ וקל לבדוק שזהו ערך מקסימלי (לא מינימלי) של $f_n(x)$. לכן

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\ge0}\left|f_n(x)\right|=\lim_{n\to\infty}\left|f_n\left(\frac{1}{n^2}\right)\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}e^{-1}=0$$

ולכן ההתכנסות היא במידה שווה.

ד. נתונה סדרת הפונקציות $f_n(x)=x^ne^{-n^2x}$ כאשר $0<x<\infty$. נבדוק התכנסות נקודתית, אם $x>0$, נחשב את הגבול $\lim_{n\to\infty} x^ne^{-n^2x}$. נוכיח שהגבול שווה לאפס שזה שקול להוכיח ש- $\lim_{n\to\infty}\ln\left(x^ne^{-n^2x}\right)=-\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(x^ne^{-n^2x}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\ln\left(x^n\right)+\ln\left(e^{-n^2x}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n\ln(x)-n^2x\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\ln(x)-n^2x\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\ln(x)-nx\right)=\infty\cdot(-\infty)=-\infty.$$

לכן $\lim_{n\to\infty} x^ne^{-n^2x}=0$. נבדוק אם ההתכנסות היא במידה שווה, נגזור את $f_n(x)=x^ne^{-n^2x}$

$$f_n'(x)=nx^{n-1}e^{-n^2x}(1-nx)$$

ואם נשווה לאפס ונחלץ את x נקבל $x=\frac{1}{n}$. ע"י חישוב נקבל $f_n\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^n}e^{-n}$, לכן

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\geq 0}\left|f_n(x)\right|=\lim_{n\to\infty}\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^n}e^{-n}=0$$

לכן ההתכנסות היא במידה שווה.

ה. נתונה סדרת הפונקציות $f_n(x)=n\sin\left(\frac{x}{n}\right)$ כאשר $|x|<\infty$. נבדוק התכנסות נקודתית, אם $t\sim 0$ (כלומר t מאוד קרוב לאפס) אז $\sin(t)\sim t$ ולכן אם x קבוע ו-$n>>0$ (כלומר n מספר גדול מאוד)

אז $\frac{x}{n}\sim\sin\left(\frac{x}{n}\right)$. לכן

$$\lim_{n\to\infty}n\sin\left(\frac{x}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}n\frac{x}{n}=x$$

לכן סדרת הפונקציות מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=x$. נבדוק התכנסות במידה שווה, נגדיר לכל n טבעי את הפונקציה $g_n(x)=x-n\sin\left(\frac{x}{n}\right)$ ונמצא את הסופרמום של g_n כאשר $|x|<\infty$.

נתבונן בסדרה $x_n=2n$, אז

$$g_n(x_n)=g_n(2n)=2n-n\sin\left(\frac{2n}{n}\right)=2n-n\sin(2)\geq 2n-n=n\to\infty$$

כאשר $n\to\infty$. לכן לכל n טבעי הסופרמום של g_n הוא אינסוף ולכן ההתכנסות היא לא במידה שווה.

ו. נתונה סדרת הפונקציות $f_n(x)=(1-x)^{\frac{1}{2n+1}}$ כאשר $0\leq x\leq 2$. נבדוק התכנסות נקודתית, אם $x=1$ אז $f_n(1)=0$ ולכן הגבול הנקודתי בנקודה זו הוא אפס. אם $0\leq x<1$ אז נחשב את הגבול

$$\lim_{n\to\infty}(1-x)^{\frac{1}{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}e^{\ln\left((1-x)^{\frac{1}{2n+1}}\right)}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{2n+1}\ln((1-x))}=e^0=1$$

לכן $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=1$ אם $0\leq x<1$. באותו אופן אפשר להראות ש- $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=-1$ אם $1<x\leq 2$.

לכן נקבל ש-

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<1\\ 0, & x=1\\ -1, & 1<x\le 2\end{cases}$$

כיוון שהפונקציות f_n רציפות והפונקציה הגבולית לא רציפה אז אין התכנסות במידה שווה.

ז.

$f_n(x)=\cos^{2n}(x)$ בקטע $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$
בקטע המדובר $0\le\cos^2 x\le 1$ למעשה $0\le\cos^2 x<1$ חוץ מאשר בנקודה $x=0$.
ולכן אם נשאיף את n לאינסוף נגלה בקלות שפונקציית הגבול היא

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$$

קיבלנו סדרת פונקציות רציפות שמתכנסת לפונקציה לא רציפה ולכן זאת התכנסות נקודתית ולא התכנסות במ"ש.

ח.

$f_n(x)=\frac{\arctan x}{n}$ ב $\mathbb{R}$
קל לראות שאם נשאיף את n לאינסוף נקבל 0 ולכן פונקציית הגבול היא 0. כדי לבדוק במ"ש נשתמש ב $\lim-\sup$ ונקבל

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\{\frac{\arctan x}{n}\}=\frac{\pi}{2n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}=0$$

ולכן ההתכנסות במ"ש ב $\mathbb{R}$.

ט.

$f_n(x)=x^n-x^{2n}$ בקטע $(-1,1)$
קל לראות שעבור כל x בקטע, הפונקציה מתכנסת ל 0 כאשר n שואף לאינסוף ולכן פונקציית הגבול היא 0.
נשתמש ב $\lim-\sup$ כדי לבדוק התכנסות במ"ש. אם n אי זוגי ו x קרוב ל -1 אז x^n-x^{2n} קרוב ל -2. לכן עבור n אי זוגי

$$\sup_{x\in(-1,1)}\{|x^n-x^{2n}|\}\ge 2$$

לכן אין סיכוי שהסדרה הזאת מתכנסת ל 0 (כל האיברים האי זוגיים שלה גדולים מ 2) ואין התכנסות במ"ש.

י. $f_n(x)=\frac{1}{nx+1}$ בקטע $(0,\infty)$
קל לראות שאם משאיפים את n לאינסוף הפונקציה שואפת ל 0 ולכן פונקציית הגבול היא 0. כעת נשתמש ב $\lim-\sup$

$$\sup_{x\in(0,\infty)}\{\frac{1}{nx+1}\}=1$$

ולכן אין התכנסות במ"ש.

.2

נניח בשלילה כי f_n מתכנסת במ"ש ב (a,b) ונוכיח שהיא מתנסת במ"ש ב $[a,b]$ בסתירה לנתון. לפי ההנחה שלנו

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(a,b)}|f_n(x)-f(x)|=0$$

אבל נשים לב ש

$$\sup_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|=\max\{\sup_{x\in(a,b)}|f_n(x)-f(x)|,|f_n(a)-f(a)|,f_n(b)-f(b)|\}$$

נשים לב שכאשר $n\to\infty$ מתקיים ש

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(a,b)}|f_n(x)-f(x)|=0$$

$$\lim_{n\to\infty}|f_n(a)-f(a)|=0$$

$$\lim_{n\to\infty}|f_n(b)-f(b)|=0$$

(הראשון מהתכנסות במ"ש ב (a,b), והשני והשלישי מהתכנסות נקודתית ב $[a,b]$) ולכן

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|=\lim_{n\to\infty}\max\{\sup_{x\in(a,b)}|f_n(x)-f(x)|,|f_n(a)-f(a)|,f_n(b)-f(b)|\}=0$$

כלומר סדרת הפונקציות מתכנסת במ"ש ב $[a,b]$ בסתירה לנתון.