שימושים של אינטגרל מסוים

~~הגדרה~~ שטח בין שני גרפים:

יהיו f ו g פונקציות רציפות בקטע $[a,b]$.

אם $f(x)\geq g(x)$ לכל x בקטע אזי השטח
התחום החסום ע"י הגרף $y=f(x)$ מלמעלה, משמאל
הגרף $y=g(x)$ מלמטה, הישר $x=a$ (הישר
$x=b$ מימין, הוא:

$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx$$

הערה: אם ~~f(x)~~ לא בהכרח מתקיים
$f(x)\geq g(x)$ אזי הנוסחה היא:

$$A=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

למעשה נחלק את התחום לתת קטעים נפרד
אם $f(x)\geq g(x)$ ב $[x_1,x_2]$ אזי

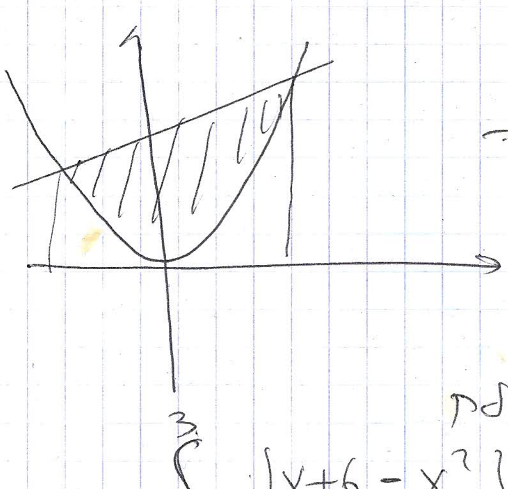
$$\int_{x_1}^{x_2}[f(x)-g(x)]\,dx$$

ואם בקטע $[x_3,x_4]$ מתקיים $g(x)\geq f(x)$ אזי

$$\int_{x_3}^{x_4}[g(x)-f(x)]\,dv$$

דוגמה: מצא את שטח הכלוא בין $y=x^2$ (~~$x=y^2$~~)
ל $y=x+6$.

פתרון: דבר ראשון נמצא את
חיתוך בין שני הגרפים ולכן
נמצא פתרון המערכת:



$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=x+6\end{cases} \Rightarrow x^2=x+6 \Rightarrow \begin{matrix} x=-2 \\ x=3\end{matrix}$$

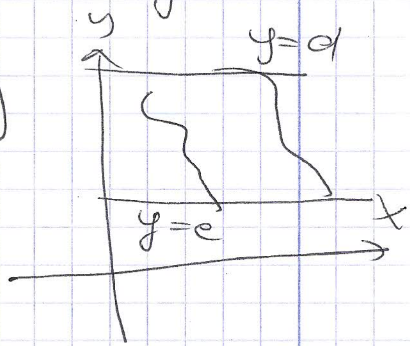
כיוון ש $x+6\geq x^2$ ב $[-2,3]$ אזי

$$\int_{-2}^{3}[x+6-x^2]\,dx=\frac{x^2}{2}+6x-\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{3}=\frac{125}{6}$$

נוסחה שניה לחישוב שטח

יהיו w ו- v פונק' רציפות בקטע $[c,d]$ כך ש- $w(y) \geq v(y)$ לכל x בקטע, אזי שטח התחום המוגבל ע"י $x=v(y)$ משמאל, $x=w(y)$ מימין, $y=c$ מלמטה, $y=d$ מלמעלה הוא

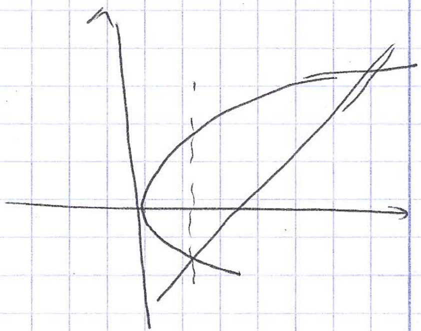
$$A = \int_c^d [w(y)-v(y)]\,dy$$



<u>דוגמה:</u> מצא שטח התחום הכלוא בין $x=y^2$ ל- $y=x-2$.

<u>דרך א':</u> נמצא נקודות חיתוך

כאן נשאר בפונקציות רציפות של x אם נפתור את מערכת המשוואות:



$$\begin{cases} x=y^2 \\ x=y+2 \end{cases}$$

נק' חיתוך: $x=1$, $y=-1$; $x=4$, $y=2$

תחום האינטגרציה שלו $0 \leq x \leq 4$ וכדי לחלק אותו לשני קטעים: $[0,1]$, $[1,4]$

לכל אחד מ-התחומים - זה פתרון ונחשב את האינטגרל:

$$A = \int_0^1 [\sqrt{x}-(-\sqrt{x})]\,dx + \int_1^4 [\sqrt{x}-(x-2)]\,dx =$$

$$= 2\tfrac{2}{3}x^{\frac32}\Big|_0^1 + \left[\tfrac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_1^4 = \cancel{\tfrac43} + \left(\cancel{\tfrac{16}{3}} - \cancel{8} + \cancel{8}\right) -$$

$$-\left(\cancel{\tfrac23} - \tfrac12 + \cancel{2}\right) = \cancel{16} - 3 + \tfrac12 + \cancel{16} = \frac{9}{2} = 4.5$$

<u>דרך ב':</u> נשתמש בפונקציות כפונקציה של y

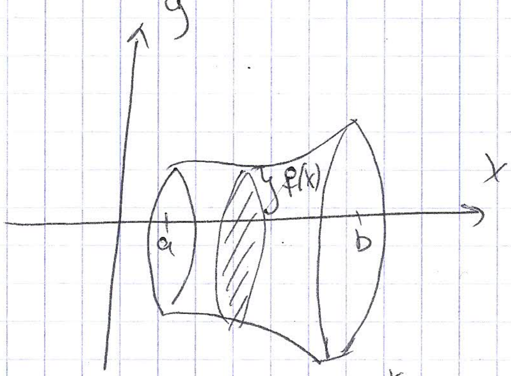
תחום האינטגרציה הוא $-1 \leq y \leq 2$

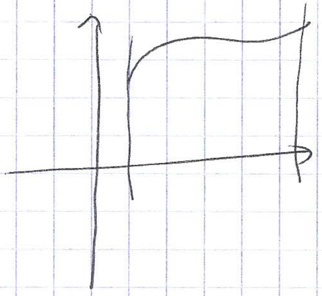
$$\int_{-1}^{2} [y+2-y^2]\,dy = \left[\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{2} = 2+4-\frac{8}{3} -$$

$$- \left[\tfrac12 - 2 + \tfrac13\right] = 6 - 3 - \tfrac12 + 2 = 5 - \tfrac12 = 4.5$$

חישוב נפחים

תהי f פונקציה רציפה ואי-שלילית בקטע $[a,b]$ ויהי R תחום המוגבל ע"י הגרף של f מעלה, ציר ה-x מלמטה והישרים $x=a$ ו $x=b$ משני הצדדים. כאשר התחום מסתובב סביב ציר ה-x הוא יוצר גוף, שבו חתכים (הניצבים לציר ה-x) עגולים.





נוסחה לנפח הוא:

$$V=\int_a^b \pi\,[f(x)]^2\,dx$$

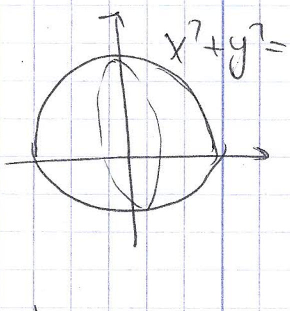
מניחים ש: $f(x) \geq g(x) \geq 0$

$$V=\int_a^b \pi\left(f^2(x)-g^2(x)\right)dx$$

<u>דוגמה:</u> נמצא נוסחה לחישוב נפח של כדור ברדיוס r:

<u>פתרון:</u> אפשר לקבל כדור ברדיוס r ע"י סיבוב חצי העליון של המעגל

$$x^2+y^2=r^2$$



סביב ציר ה-x. החצי העליון של המעגל הוא הגרף של $y=f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ ולכן נקבל שנפח
$g(x)=0$
הכדור הוא:

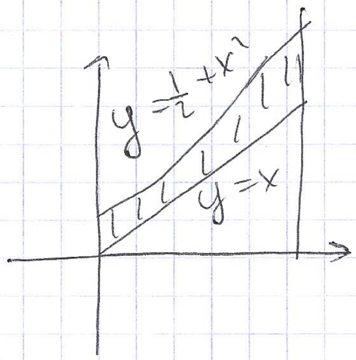
$$V=\int_a^b \pi\,[f(x)]^2\,dx=\int_{-r}^{r}\pi\,(r^2-x^2)\,dx=$$

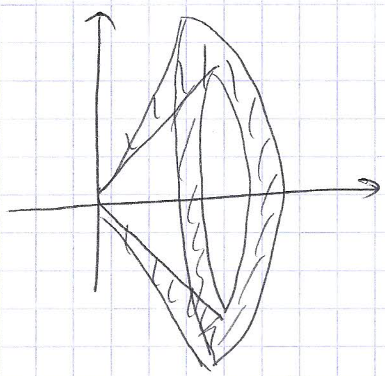
$$=\pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{x=-r}^{r}=\frac{4}{3}\pi r^3$$

דוגמה נוספת:

מצא את נפח הגוף הנוצר כאשר מסובבים
את התחום הכלוא בין הגרפים של $f(x)=\frac{1}{2}+x^2$
ו- $g(x)=x$ בקטע $[0,2]$ סביב ציר ה-x!

פתרון:





לפי הנוסחה לנפח:

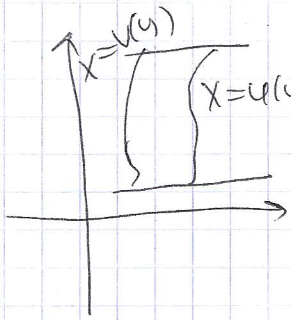
$$V=\int_a^b \pi\left([f(x)]^2-[g(x)]^2\right)dx=$$

$$=\int_0^2 \pi\left(\left[\frac{1}{2}+x^2\right]^2-x^2\right)dx=\int_0^2 \pi\left(\frac{1}{4}+x^4\right)dx=$$

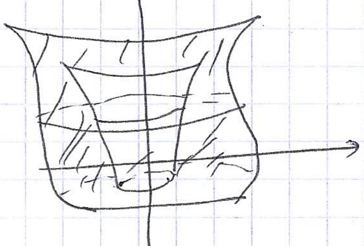
$$=\pi\left[\frac{x}{4}+\frac{x^5}{5}\right]\Big|_0^2=\frac{69\pi}{10}$$

הערה: קיימת נוסחה לחישוב נפח גוף סיבוב כאשר מסובבים את התחום סביב ציר ה-y:

$$V=\int_c^d \pi\left[u(y)^2-v(y)^2\right]dy$$



$\Longrightarrow$



דוגמה: מצא את נפח הגוף הנוצר, כאשר
מסובבים את התחום הכלוא ע"י $y=\sqrt{x}$ $y=2$
$x=0$ סביב ציר ה-y.

<u>פתרון</u>: נשתמש בנוסחה ונקבל: דיסק ל $x=y^2$

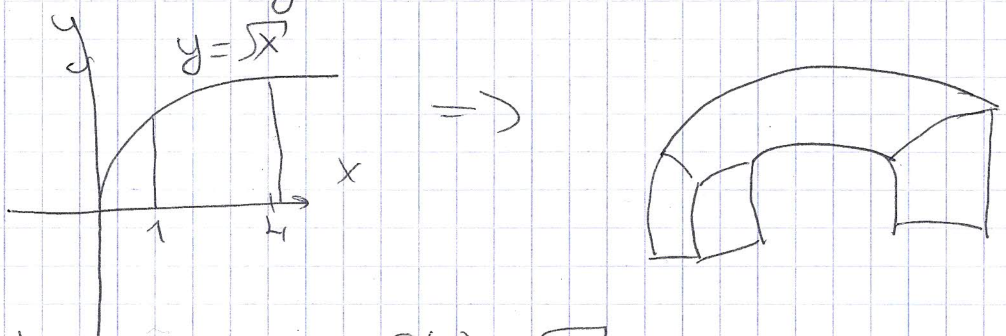
$$V=\int_0^2 \pi\left[(y^2)^2-0\right]dy=\int_0^2 \pi y^4\,dy=\pi\frac{y^5}{5}\Big|_0^2=\frac{4^5}{5}\cdot\pi$$

<u>נוסחה לחישוב נפח</u>

אם R הוא אזור מישורי, החסום ע"י
גרף הפונקציה $y=f(x)$ מלמעלה, ציר ה-x
מלמטה, הישר $x=a$ משמאל והישר $x=b$
מימין, אזי נפח הגוף הנוצר, כאשר R
מסתובב סביב ציר ה-y, נתון ע"י:

$$V=\int_a^b 2\pi x f(x)\,dx$$

<u>דוגמה</u>: התחום החסום ע"י $y=\sqrt{x}$, $x=1$, $x=4$
וציר ה-x מסתובב סביב ציר ה-y

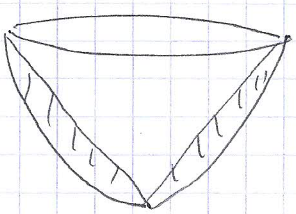


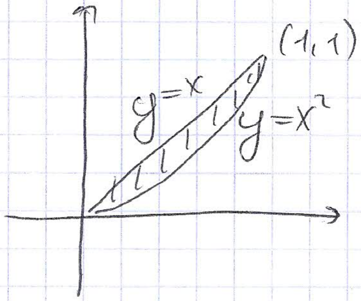
<u>פתרון</u>: מאחר ש $f(x)=\sqrt{x}$, $a=1$, $b=4$
מתקבל מנוסחה, אזי

$$V=\int_1^4 2\pi x\cdot\sqrt{x}\,dx=2\pi\int_1^4 x^{3/2}\,dx=$$

$$=2\pi\cdot\frac{2}{5}\cdot x^{5/2}\Big|_1^4=\frac{4\pi}{5}\left[32-1\right]=\frac{124\pi}{5}$$

<u>דוגמה</u>: התחום R, הכלוא בין $y=x$ ל $y=x^2$
ברביע הראשון, מסתובב סביב ציר ה-y
חשב ~~[illegible]~~ את נפח הגוף הנוצר:





<u>פתרון:</u> בכל נקודה x ב $[0,1]$, המרחק של R שמקביל לציר ה-y יוצר מעטפת של גליל שגובהו $x-x^2$ ורדיוסו x. שטח המעטפת הזו הוא:

$$2\pi\, x(x-x^2)$$

לכן נפח כל הגוף הוא:

$$V=\int_0^1 2\pi\, x(x-x^2)\,dx = 2\pi\int_0^1 (x^2-x^3)\,dx = \frac{\pi}{6}$$

<u>אורך של גרף במישור</u>

<u>(נוסחאות לחישוב אורך גרף)</u>

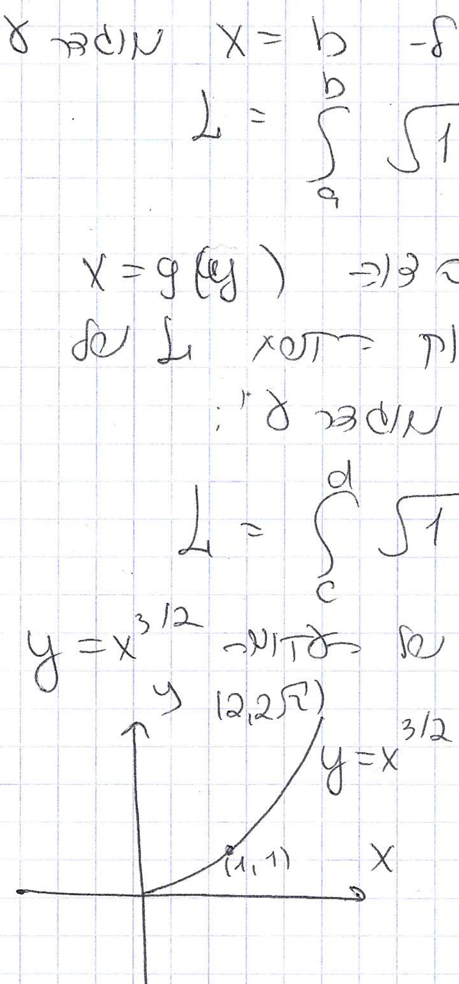
אם f גזירה ברציפות ב $[a,b]$. אורך הגרף L של הפונקציה $y=f(x)$, מ $x=a$ ל- $x=b$ מחושב ע"י:

$$L=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)}$$

באופן דומה, לפונקציה הפוכה $x=g(y)$ כאשר g' רציפה ב $[c,d]$ אורך הגרף L של הפונקציה מ $y=c$ ל $y=d$ מחושב ע"י:

$$L=\int_c^d \sqrt{1+[g'(y)]^2}\,dy$$

<u>דוגמה:</u> מצא את אורך הגרף של הפונקציה $y=x^{3/2}$ מ $(1,1)$ ל $(2,2\sqrt{2})$



<u>פתרון:</u> נסמן $f(x)=x^{3/2}$

$$f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$$

ונחשב את אורך הקשת בקטע $1 \le x \le 2$

$$L=\int_1^2\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{4}{9}\int_{13/4}^{22/4}\sqrt{u}\,du=$$

$$u=1+\frac{9}{4}x \Rightarrow x=1 \Rightarrow u=\frac{13}{4}$$
$$x=2\Rightarrow u=\frac{11}{2}$$
$$du=\frac{9}{4}dx$$

$$=\cancel{\frac{4}{9}}\cdot\frac{8}{27}u^{3/2}\Big|_{13/4}^{22/4}=\frac{8}{27}\left[\left(\frac{22}{4}\right)^{3/2}-\left(\frac{13}{4}\right)^{3/2}\right]=$$

$$=\frac{22\sqrt{22}-13\sqrt{13}}{27}$$

פתרון ב': נחלץ את x מ-המשוואה $y=x^{3/2}$
נוסף $x=y^{2/3}$ לכן $g(y)=y^{2/3}$

$$g'(y)=\frac{2}{3}y^{-1/3}$$

$1\le y\le 2\sqrt{2}$

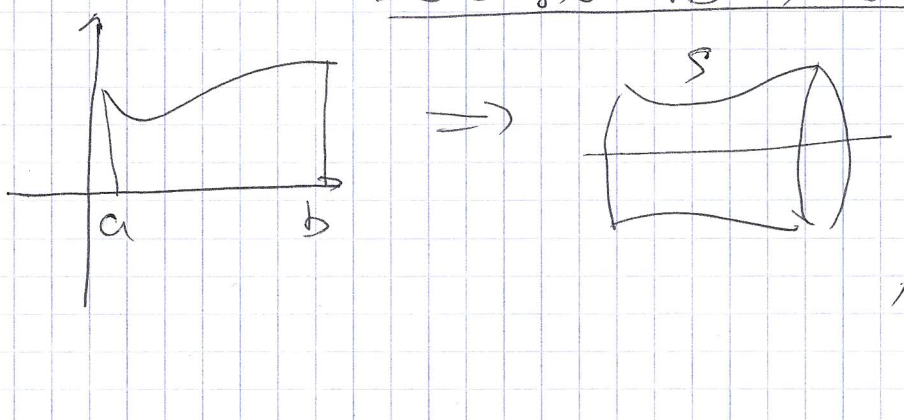
$$L=\int_1^{2\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{4}{9}y^{-2/3}}=\frac{1}{3}\int_1^{2\sqrt{2}}y^{-1/3}\sqrt{9y^{2/3}+4}\,dy=$$

$du=6y^{-1/3}dy$ $\quad u=9y^{2/3}+4$ נציב

$$=\frac{1}{18}\int_{13}^{22}u^{1/2}\,du=\frac{1}{27}u^{3/2}\Big|_{13}^{22}=\frac{1}{27}\left[(22)^{3/2}-(13)^{3/2}\right]=$$

$$=\frac{22\sqrt{22}-13\sqrt{13}}{27}$$

שטח המעטפת של גוף סיבוב



~~נוסחת~~ ~~שטח~~

נוסחאות לשטח מעטפת

תהי f פונק' חלקה ואי-שלילית בקטע $[a,b]$.
השטח S של המעטפת הנוצרת מסיבוב חלק הגרף $y=f(x)$, שבין $x=a$ ו $x=b$, סביב ציר ה-x, הוא:

$$S=\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

עבור גרף המוגדר בצורה $x=g(y)$, כאשר g' רציפה ב $[c,d]$ ו $g(y)\geq 0$ לכל $c\leq y\leq d$
השטח S של המעטפת הנוצרת מסיבוב חלק הגרף שבין $y=c$ ו $y=d$, סביב ציר ה-y, הוא:

$$S=\int_c^d 2\pi g(y)\sqrt{1+[g'(y)]^2}\,dy$$

<u>דוגמא:</u> חשב את שטח המעטפת הנוצרת מסיבוב הגרף: $0\leq x\leq \frac{1}{2}$, $y=\sqrt{1-x^2}$ סביב ציר ה-x.

<u>פתרון:</u> $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

$$f'(x)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

לכן נקבל:

$$S=\int_0^{1/2}2\pi\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\,dx=\int_0^{1/2}2\pi\,dx=2\pi x\Big|_0^{1/2}=\pi$$

<u>דוגמא:</u> חשב את שטח המעטפת הנוצרת מסיבוב הגרף - $y=\sqrt[3]{3x}$ $\quad 0\leq y\leq 2$
סביב ציר ה-y.

<u>פתרון:</u> הפעם נשתמש בנוסחה השניה.

$$x=g(y)=\frac{1}{3}y^3$$

$$g'(y)=y^2$$

$$S = \int_0^2 2\pi \left(\frac{1}{3}y^3\right) \cdot \sqrt{1+y^4}\, dy = \frac{2\pi}{3} \int_0^2 y^3 \sqrt{1+y^4}\, dy$$ 9

$du = 4y^3 dy \qquad u = 1 + y^4 \qquad$ נציב

$$\int y^3 \sqrt{1+y^4}\, dy = \frac{1}{4} \int \sqrt{u}\, du = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} + C =$$

$$= \frac{1}{6} \left(1+y^4\right)^{3/2} + C$$

$$S = \frac{2\pi}{3} \left[\frac{1}{6} \left(1+y^4\right)^{3/2} \right] \Big|_0^2 = \frac{\pi}{9} \left(17^{3/2} - 1\right)$$