פתרון תרגיל 12 – טופולוגיה 2014

**שאלה 1**

1. נגדיר יחס שקילות על : . הוכיחו כי  הומיאומורפי ל- .
רמז: מצאו את ההעתקה ההפוכה ל -  מ-  ל - .
2. נגדיר יחס שקילות על : . לְמה הומיאומורפי ?

**פתרון**

1. נגדיר על-ידי . מתקיים ,
לכן  המוגדרת על-ידי  היא חח"ע; ומכיוון ש-  רציפה כך גם .

נראה ש- רציפה:
תהי  מוגדרת על-ידי  אזי  באשר

 ולכן  רציפה כהרכבת רציפות (שימו לב ש- רציפה כפונקציה לתוך מרחב מכפלה, אשר רציפה רכיב רכיב. בנוסף, שימו לב שהטופולוגיה האוקלידית על  מתלכדת עם טופולוגיית המכפלה). נותר להוכיח כי .

 לכן ההרכבה  היא הזהות ( ). ניתן להראות שההרכבה בכיוון השני נותנת גם היא את פונקציית הזהות ().

מכאן  רציפה וקיבלנו בסה"כ ש- הומיאומורפי ל-.

1. נגדיר  על-ידי . (שימו לב ש- על ). בדיוק כמו בסעיף א' מסיקים ש- חח"ע ורציפה וגם כאן אם נגדיר  על-ידי  בדומה לסעיף א' ניתן לבדוק ולראות ש-  (בדקו הרכבה בשני הכיוונים ותקבלו את פונקציות זהות). כעת מספיק להוכיח ש- רציפה. ואמנם  באשר ולכן  רציפה כהרכבת רציפות וקיבלנו בסה"כ ש-.

**שאלה 2**

יהי  מרחב המנה של  המתקבל מיחס השקילות הבא:

. הראו ש- הומיאומורפי ל-.

**פתרון**

המועמד הטבעי .

מתקיים  ולכן  חח"ע.



 רציפה ולכן  רציפה.

נמצא את הפונקציה ההופכית של . נגדיר:  על-ידי:.

לכל  מתקיים: .

מצד שני, לכל  מתקיים .

לכן  היא הפונקיצה ההופכית של . קל לראות ש- ומכיון ש-  רציפה אז גם .

בסה"כ  רציפה, הפיכה ו-  רציפה ולכן  הומיאומורפיזם.

דרך אחרת: ניתן להראות ש- היא העתקה פתוחה (תמונה של קטע פתוח היא קבוצה פתוחה) ולכן מנה (שכן היא רציפה ועל) ולכן  מנה (שכן היא חח"ע).

**שאלה 3**

יהי  מרחב המנה של  המתקבל על-ידי זה שמזהים זו לזו את כל הנקודות  כך ש- . בלשון אחרת,  הוא מרחב המנה  כאשר  הוא יחס שקילות המוגדר באופן הבא:  אם ורק אם  או  וגם . הראו ש- הומיאומורפי למעגל .

**פתרון**

תזכורת: הקטע  כשמזהים בו את הנקודות  הומיאומורפי ל- .

נגדיר פונקציה  המכבדת את יחס השקילות.

כל הנקודות מחוץ ל-  עוברות לאותה נקודה במנה, ולכן נעתיק את  לאותה נקודה אליה נשלחות .

אנחנו יודעים איך להעתיק את  ל- ולכן נעתיק את  ל- הומיאומורפית על-ידי הפונקציה הטבעית  המוגדרת על-ידי  (שימו לב ש-). לאחר מכן נרכיב אותה עם הפונקציה הידועה  המוגדרת על-ידי  (שימו לב שהנקודות  עוברות תחת  לנקודה ). לכן, .

כעת  מוגדרת באופן הבא:

 .

תת-טענה:  רציפה.

תת-הוכחה: נשתמש במשפט שראינו בכיתה:  מ"ט, ויהי  כיסוי סגור של , כלומר  סגורה עבור , ומתקיים . אם  פונקציה כך ש-  רציפה לכל , אזי  רציפה.

במקרה שלנו, מתקיים וכן  ומכאן הן סגורות המקיימות את תנאי המשפט, ולכן  רציפה.

מש"ל תת-טענה.

**סיכום ביניים:**

*  רציפה ועל;

* מתקיים  אם ורק אם 

ולכן  חח"ע;

*  רציפה   רציפה;
*  על   על.

נוכיח כעת ש-  הוא מרחב קומפקטי: נשים לב שצמצום העתקת המנה  היא העתקה רציפה ו**על** ממרחב קומפקטי, ולכן גם התמונה  היא מרחב קומפקטי.

כעת  רציפה מקומפקטי להאוסדורף, ולכן היא העתקה סגורה.

כלומר  רציפה, סגורה, חח"ע ו**על**, ולכן היא הומיאומורפיזם.

**שאלה 4**

מצאו דוגמה להעתקת מנה שאינה פתוחה ואינה סגורה.

**פתרון**

בתרגול האחרון פתרנו את התרגיל הבא:

*נתבונן במרחב שרפינסקי (Sierpinsky). זהו המרחב  עם הטופולוגיה .*

1. *הוכיחו שמרחב שרפינסקי אינו מטריזבילי.*
2. *יהי  ותהי  מוגדרת על-ידי .*

*נגדיר יחס שקילות על  באופן הבא:  הוכיחו כי  הומיאמורפי למרחב שרפינסקי.*

הפונקציה  היא פונקצית מנה ונראה כעת שהיא אינה פתוחה ואינה סגורה.

אינה פתוחה:  פתוחה ב- וגם .

אינה סגורה:  סגורה ב- וגם  אינה סגורה ב-.

**שאלה 5**

נתבונן ב-  ובתת-קבוצה שלו . נאמר ש- היא קבוצה סגורה אם  כאשר:  היא תת-קבוצה סגורה של  בטופולוגיה האוקלידית, ו- היא תת-קבוצה כלשהי של . הוכחתם בתרגיל בית 5 שהמשלימים של הקבוצות הסגורות הללו יוצרים טופולוגיה על . נסמן את הטופולוגיה הזאת ב-.

1. נאפיין את הקבוצות הפתוחות: הוכיחו כי  אמ"מ  כאשר  היא תת-קבוצה פתוחה של  בטופולוגיה האוקלידית ו-.
2. הוכיחו כי  מכילה את הטופולוגיה האוקלידית והסיקו ש- הוא .
3. הראו שאם  כך ש- אזי  פתוחה בטופולוגיה האוקלידית.
4. הוכיחו שלא קיימות  זרות כך ש- והסיקו ש- אינו .

**פתרון**

1.  אמ"מ  סגורה אמ"מ  כאשר:  היא תת-קבוצה סגורה של  בטופולוגיה האוקלידית ו- היא תת-קבוצה כלשהי של . זה מתקיים אמ"מ  עבור  הנ"ל. נציב . קל לראות ש- פתוחה באוקלידית ו-.
2. תהי  קבוצה פתוחה בטופולוגיה האוקלידית, אזי ניתן להציגה כ- כאשר  ולכן על-פי סעיף א', .

הטופולוגיה האוקלידית היא מטריזבילית ולכן  ולכן כל טופולוגיה שתכיל אותה גם תהיה  (מדוע?).

1. על-פי סעיף א', כאשר  היא תת-קבוצה פתוחה של  בטופולוגיה האוקלידית ו-.מהנתון  וכמו כן  ולכן  ומכאן  ולכן  ו-.
2. נניח בשלילה שקיימות  זרות כך ש-. על-פי ג'  פתוחה בטופולולגיה האוקלידית, על-פי סעיף א'  כאשר  היא תת-קבוצה פתוחה של  בטופולוגיה האוקלידית ו-. כעת,  שפתוחה בטופולוגיה האוקלידית שבה מתקיים . מכאן נובע כי  (מדוע?) ולכן גם . מתקיים  וכן  פתוחה באוקלידית ולכן בהכרח . מכיוון ש- נסיק ש- (אכן, שימו לב שמתקיים ). לכן  בסתירה לכך ש- זרות.

על מנת להסיק ש- אינו  שימו לב ש- סגורה ב-.

**בּהצלחה בבחינה!**