מבחן מועד ב - פתרון

שאלה 1: קבע האם הטורים הבאים מתכנסים בהחלט, בתנאי או מתבדרים:

(א) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(2^n)}{n\ln^2 n}.$$

פתרון:

נבדוק האם הטור מתכנס בהחלט.

$$\left|\frac{\cos(2^n)}{n\ln^2 n}\right| \le \frac{1}{n\ln^2 n}$$

כעת, מספיק להראות שהטור החיובי $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$ מתכנס.

על פי מבחן האינטגרל מספיק להראות שהאינטגרל $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}$ מתכנס.

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim_{b\to\infty}\int_2^{b}\frac{1}{x\ln^2 x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left.\frac{-1}{\ln x}\right|_2^b = \frac{1}{\ln 2}$$

מתכנס.

לכן הטור הנתון מתכנס בהחלט.

(ב) $$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi)\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

פתרון:

נשים ♡ שעבור כל n טבעי $\cos(n\pi)=(-1)^n$, לכן הטור הינו בעצם: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\ln(1+\frac{1}{n})$.

מאחר שהסדרה $\frac{1}{n}$ יורדת מונוטונית ל-0, הסדרה $\ln(1+\frac{1}{n})$ יורדת מונוטונית ל-0 ומכאן הטור מתכנס כטור לייבניץ.

נבדוק התכנסות בהחלט.

היות ו- $\left|(-1)^n\cdot\ln(1+\frac{1}{n})\right| = \ln(1+\frac{1}{n})$ יש לבדוק את ההתכנסות של $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$

נשים ♡ כי: $$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] = \ln e = 1$$

לכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$ מתבדר ע"י השוואה לטור הרמוני

$\Leftarrow$ הטור המקורי מתכנס בתנאי.

שאלה 2:

א) פתח את הפונקציה $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ לטור חזקות ומצא את תחום ההתכנסות של הטור.

פתרון:

ידוע כי: $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^n$

אם נציב x^2 במקום x נקבל: $\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^{2n}$

טור זה מתכנס עבור x כך שמתקיים $-1<x^2<1$,

לכן תחום ההתכנסות של הטור $-1<x<1$.

ב) פתח את הפונקציה $g(x)=\arctan x$ לטור חזקות ומצא את תחום ההתכנסות של הטור.

פתרון:

כדי לקבל פיתוח של $g(x)=\arctan x$ נבצע אינטגרציה איבר-איבר של הטור שהתקבל בסעיף א:

$$g(x)=\arctan x=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\,dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot t^{2n}\,dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^{2n}\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

לפי מנה, רדיוס ההתכנסות של הטור הוא גם $R=1$

נבדוק קצוות, לפי מבחן לייבניץ הטור מתכנס גם עבור $x=1$ וגם $x=-1$

כי עבור $x=1$: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{\text{מונוטונית יורדת ל-0}}$

ועבור $x=-1$: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{\text{מונוטונית יורדת ל-0}}$

ולכן תחום ההתכנסות: $-1\le x\le 1$

ג) מצא קירוב למספר π בדיוק של 0.2.

<u>פתרון:</u>

נשתמש בזהות $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

לכן $\pi = 4 \cdot \arctan 1 = 4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

כיון זהו טור לייבניץ שלכן מתקיים $|R_n| < a_{n+1}$

נדרוש: $|R_n| < 4 \cdot \frac{1}{2(n+1)+1} < 0.2$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{2n+3} < \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow 2n+3 > 20 \Rightarrow n > 8 \Rightarrow \underline{n=9}$$

ולכן הקירוב הוא:

$$S = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{3} - \frac{4}{11} + \frac{4}{13} - \frac{4}{15} + \frac{4}{17} - \frac{4}{19} \approx 3.042$$

ד) מצא קירוב ל $\int_0^{1/2} \frac{\arctan x}{x}\,dx$ בדיוק של 0.01

<u>פתרון:</u>

לכל $[-1,1]$ מתקיים: $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

לכן

$$\frac{\arctan x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{2n+1}.$$

$$\int_0^{1/2} \frac{\arctan x}{x}\,dx = \int_0^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}\,dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)^2}$$

והמשך כמו בסעיף ג

שאלה 3:

מצא את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot x^{n-1}$ וחשב סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n-1}}$

פתרון:

נמצא את תחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot x^{n-1}$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = 1$$

הטור אינו מתכנס ב $x=\pm 1$ ולכן תחום ההתכנסות $-1<x<1$.

(1) נסמן $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot x^{n-1}$, נזכיר כי טור חזקות שמותר לגזור ולבצע פעולות שונות על הטור להגיע ל $f(x)$.

נזכיר כי:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

ננסה להגיע לאותו מבנה כמו טור הנתון. נגזור ונקבל:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

נכפיל ב-x:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

שוב נגזור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

$$\Leftarrow \quad \underline{\underline{f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3}}}, \quad |x|<1$$

(2) נשתמש בתוצאה של (1) לחישוב סכום הטור $\sum_{n=1} \frac{n^2}{2^{n-1}}$

נציב $x=\frac{1}{2}$ ונקבל:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n-1}} = \frac{1+\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^3} = \underline{\underline{12}}$$

שאלה 4:

נתון טור חזקות: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+(-1)^n n+1} x^n$

(א) מצא את רדיוס ההתכנסות של הטור

פתרון

לפי מבחן ד'אלמבר:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+(-1)^n n+1}\cdot\frac{(n+1)^2+(-1)^{n+1}(n+1)+1}{n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{(n+1)^2\cdot\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}\right]}{n^2\left[1+\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{n^2}\right]}=1$$

(ב) בדוק בקצוות.

עבור $x=1$:

$$\frac{(-1)^n\cdot n}{n^2+(-1)^n\cdot n+1}=\frac{(-1)^n}{n}+\left[\frac{(-1)^n n}{n^2+(-1)^n\cdot n+1}-\frac{(-1)^n}{n}\right]$$

$$=\dots=\underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{(1)}+\underbrace{\frac{-n-(-1)^n}{n(n^2+(-1)^n\cdot n+1)}}_{(2)}$$

(1) הטור $\sum\frac{(-1)^n}{n}$ מתכנס לפי לייבניץ.

(2) הטור $\sum\frac{-n-(-1)^n}{n(n^2+(-1)^n\cdot n+1)}$ מתכנס בהשוואה עם הטור $\sum\frac{1}{n^2}$

עבור $x=-1$:

$$\frac{(-1)^n\cdot n\cdot(-1)^n}{n^2+(-1)^n\cdot n+1}=\frac{(-1)^{2n}\cdot n}{n^2+(-1)^n\cdot n+1}=\frac{n}{n^2+(-1)^n\cdot n+1}$$

$$=\frac{1}{n+(-1)^n+\frac{1}{n}}\sim\frac{1}{n}$$

לכן מתבדר ב- $x=-1$.