נמצא בסיס לחיתוך של מרחב השורות ומרחב העמודות של המטריצה:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

נתאר כל אחד מהמרחבים ע"י משוואות, והחיתוך הוא אוסף הפתרונות של כל המשוואות. כדי למצוא משוואות מייצגות למרחב, אנחנו שמים את הוקטורים הפורשים בעמודות, בעמודה הנוספת איבר כללי, מדרגים ודורשים שיהיה פתרון.

מרחב העמודות נפרש ע"י עמודות המטריצה, ולכן M שלנו היא כבר מטריצה שבה העמודות נמצאות בעמודות...לכן:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -3 & -2 & 3 & x \\ -1 & 0 & 0 & -2 & y \\ -2 & 0 & 1 & 1 & z \\ -3 & 0 & 2 & 4 & w \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & -y \\ 0 & 3 & 2 & -3 & -x \\ -2 & 0 & 1 & 1 & z \\ -3 & 0 & 2 & 4 & w \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & -y \\ 0 & 3 & 2 & -3 & -x \\ 0 & 0 & 1 & 5 & z-2y \\ 0 & 0 & 2 & 10 & w-3y \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & -y \\ 0 & 3 & 2 & -3 & -x \\ 0 & 0 & 1 & 5 & z-2y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w+y-2z \end{array}\right)$$

קיבלנו משוואה: $w + y - 2z = 0$.

כעת, נמצא משוואות מייצגות למרחב השורות - את השורות נשים בעמודות:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & -2 & -3 & x \\ -3 & 0 & 0 & 0 & y \\ -2 & 0 & 1 & 2 & z \\ 3 & -2 & 1 & 4 & w \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3}y \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -x \\ -2 & 0 & 1 & 2 & z \\ 3 & -2 & 1 & 4 & w \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3}y \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -x \\ 0 & 0 & 1 & 2 & z-\frac{2}{3}y \\ 0 & -2 & 1 & 4 & w+y \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3}y \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -x \\ 0 & 0 & 1 & 2 & z-\frac{2}{3}y \\ 0 & 0 & 5 & 10 & w+y-2x \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3}y \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -x \\ 0 & 0 & 1 & 2 & z-\frac{2}{3}y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w+y-2x-5\left(z-\frac{2}{3}y\right) \end{array}\right)$$

וקיבלנו משוואה: $-2x+\frac{13}{3}y-5z+w=0$.

עכשיו, החיתוך הוא אוסף הפתרונות של שתי המשוואות:

$$C(M)\cap R(M)=\left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 \middle| \left\{\begin{array}{c} y-2z+w=0 \\ -2x+\frac{13}{3}y-5z+w=0 \end{array}\right.\right\}$$

נפתור את המשוואות - מהמשוואה הראשונה, $y=2z-w$. נציב בשנייה ונקבל:

$$-2x+\frac{13}{3}(2z-w)-5z+w=0 \to -2x+\frac{11}{3}z-\frac{10}{3}w=0 \to x=\frac{11}{6}z-\frac{10}{6}w$$

נסמן $z=t, w=s$ ונקבל:

$$C(M)\cap R(M)=\left\{\left(\frac{11}{6}t-\frac{10}{6}s, 2t-s, t, s\right) \middle| t,s\in\mathbb{R}\right\}$$

"נפרק" לפי הסקלרים:

$$= \left\{ t\left(\frac{11}{6},2,1,0\right) + s\left(-\frac{10}{6},-1,0,1\right) | t,s\in\mathbb{R} \right\}$$

סה"כ:

$$C(M)\cap R(M) = sp\left\{ \left(\frac{11}{6},2,1,0\right), \left(-\frac{10}{6},-1,0,1\right) \right\}$$

נמצא בסיס לתת־המרחב הבא של $V=\mathbb{R}_2[x]$: $U=\{p(x)\in V | p(x)=xp'(x)\}$.

נרשום: $p(x)=ax^2+bx+c$ ונקבל:

$$U=\left\{ax^2+bx+c | ax^2+bx+c = x(2ax+b)\right\} = \left\{ax^2+bx+c | ax^2+bx+c = 2ax^2+bx\right\}$$

פולינומים הם שווים אם ורק אם כל המקדמים שווים. אם "מתרגמים" את הפולינומים לוקטורים, קל לראות זאת:

$$\{(a,b,c) \mid (a,b,c)=(2a,b,0)\} = \left\{ (a,b,c) \mid \left\{ \begin{array}{c} a=2a \\ b=b \\ c=0 \end{array} \right. \right\} = \{(0,b,0) | b\in\mathbb{R}\}$$

כשנתרגם חזרה לפולינומים: $U=\{bx | b\in\mathbb{R}\}$.

מערכת משוואות בכתיב מטריציוני:

$$Av=b \to \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

המטריצה ועמודת המקדמים החופשיים הם קבועים ונתונים, הוקטור v הוא וקטור של נעלמים. למערכת יש פתרון = יש וקטור x_0 ספציפי שנציב במקום

v ונקבל פסוק אמת.

שאלה: אם למערכת $A^2v = b$ יש פתרון אז למערכת $Av = b$ יש פתרון.

נתון שיש וקטור ספציפי x_0 שמקיים: $A^2x_0 = b$, צ"ל שקיים וקטור ספיציפי y_0 שמקיים: $Ay_0 = b$. אפשר לרשום: $A\left(Ax_0\right) = b$, ולכן: $y_0 = Ax_0$ מקיים את הדרוש.