

תרגיל 5 מבוא לתורת החבורות

שאלה 5.1

1. מצאו את שתי הספרות האחרונות של המספר 3333^{4444} .

2. הראו כי

$$29^{203} \equiv 9 \pmod{13}$$

שאלה 5.2

1. יהי $f : G \rightarrow H$ איזומורפיזם. הוכיחו כי f^{-1} הוא גם איזומורפיזם.

2. יהיו $f : G \rightarrow H$ ו $g : H \rightarrow K$ שני הומומורפיזמים. הוכיחו כי ההרכבה $g \circ f$ היא גם הומומורפיזם.

3. נאמר כי G איזומורפית ל H אם יש ביניהם איזומורפיזם. הוכיחו כי "איזומורפי ל" הוא יחס שקילות.

שאלה 5.3 תהי G חבורה שלה יש בדיוק 4 איברים מסדר 5. תהי H חבורה איזומורפית ל G . הוכיחו כי גם ב H יש בדיוק 4 איברים מסדר 5.

שאלה 5.4 יהי $f : G \rightarrow H$ הומומורפיזם. נניח כי G אבלית, הוכיחו כי $\text{Im } f$ גם חבורה אבלית.

שאלה 5.5 עבור כל אחת מהפונקציות הבאות. קבעו אם היא הומומורפיזם/ מונומורפיזם/ אפימורפיזם/ איזומורפיזם.

1. עבור $G = (\mathbb{Q}, +)$ ו $H = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ הפונקציה $f : G \rightarrow H$ המוגדרת לפי $f(x) = e^x$.

2. $f : S_7 \rightarrow \mathbb{Z}$ המוגדרת לפי $f(\sigma) = \sigma(1)$.

3. $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$ המוגדרת לפי $f(k) = [k]$ (כלומר שולחת כל איבר k למחלקת השקילות שלו מודולו n)

4. G חבורה ו $x \in G$. פונקציה $f : G \rightarrow G$ מוגדרת לפי $f(g) = xgx^{-1}$.

שאלה 5.6 בכל אחד מהסעיפים הבאים הפרך או תן דוגמא:

1. האם יש אפימורפיזם

$$f : \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

2. האם יש אפימורפיזם

$$f : \mathbb{Z}_{20} \rightarrow \mathbb{Z}_5$$

3. האם יש איזומורפיזם

$$f : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \cdot)$$

רמז: התשובה כבר (כמעט) נמצאת בשאלה אחרת בתרגיל בית.

4. האם יש איזומורפיזם

$$f : (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \cdot)$$

5. האם יש מונומורפיזם

$$f : S_3 \rightarrow \mathbb{Z}_{100} \times \mathbb{Z}_{100} \times \mathbb{Z}_{50}$$

שאלה 5.7 יהיו $f_1, f_2 : G \rightarrow H$ שני הומומורפיזמים. ניקח כמה איברים $g_1, \dots, g_k \in G$ ונניח כי לכל $1 \leq i \leq k$ מתקיים

$$f_1(g_i) = f_2(g_i)$$

. הוכיחו כי לכל $x \in \langle g_1, \dots, g_k \rangle \leq G$ מתקיים כי

$$f_1(x) = f_2(x)$$

לאמור: הומומורפיזמים שמסכימים על קבוצת איברים מסכימים על התת חבורה שהקבוצה הזאת יוצרת.