פתרון תרגיל בית מספר 9

אינטגרלים לא אמיתיים

1. $I=\int_0^2 \frac{dx}{x-2}$, דהיינו: $I=\lim_{\substack{\lambda\to 2\\ <}}\int_0^{\lambda} \frac{dx}{x-2}$

$$\int_0^{\lambda} \frac{dx}{x-2}=\left[\ln|x-2|\right]_0^{\lambda}=\ln(2-\lambda)-\ln 2$$

$$\lim_{\substack{\lambda\to 2\\ <}}(2-\lambda)=0^+ \quad\Rightarrow\quad \lim_{\substack{\lambda\to 2\\ <}}\ln(2-\lambda)=-\infty \quad\Rightarrow\quad I=-\infty$$

האינטגרל הלא אמיתי הנתון מתבדר.

2. נחשב את $I=\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$. הפונקציה $f:x\to\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ הנתונה רציפה על הקטע $[1,2)$

אבל אי-רציפה משמאל ב-2. נגדיר $I(\lambda)=\int_1^{\lambda}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$. אזי:

$$I(\lambda)=\int_1^{\lambda}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\left[\arcsin\frac{x}{2}\right]_1^{\lambda}=\arcsin\frac{\lambda}{2}-\arcsin\frac{1}{2}=\arcsin\frac{\lambda}{2}-\frac{\pi}{6}$$

מזה נובע: $I=\lim_{\substack{\lambda\to 2\\ <}} I(\lambda)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$. האינטגרל הלא אמיתי הנתון מתכנס.

3.

נחשב את $I=\int_0^1 x\ln x\,dx$. הפונקציה $f:x\to x\ln x$ הנתונה רציפה על הקטע $(0,1]$

אבל אי רציפה מימין ב-0. נגדיר: $I(\lambda)=\int_{\lambda}^1 x\ln x\,dx$. אזי:

$$I(\lambda)=\int_{\lambda}^1 x\ln x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2\right]_{\lambda}^1=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\lambda^2\ln\lambda+\frac{1}{4}\lambda^2$$

קל לאשר ש- $\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ >}}\lambda^2\ln\lambda=0$. לכן $I=\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ >}} I(\lambda)=-\frac{1}{4}$.

5.

נחשב את $I=\int_{-1}^2 x^2\ln|x|\,dx$. הפונקציה $f:x\to x^2\ln|x|$ הנתונה רציפה על $[-1,0)$

ועל $(0,2]$, אבל ב-0 היא אי-רציפה. נגדיר:

$$I_1(\lambda)=\lim_{\substack{\gamma\to 0\\ <}}\int_{-1}^{\lambda}x^2\ln|x|\,dx\ ;\ I_2(\lambda)=\lim_{\substack{\gamma\to 0\\ >}}\int_{\lambda}^{2}x^2\ln|x|\,dx$$

$$I_1(\lambda)=\int_{-1}^{\lambda}x^2\ln|x|\,dx=\int_{-1}^{\lambda}x^2\ln(-x)dx=\left[\frac{1}{3}x^3\ln(-x)-\frac{1}{9}x^3\right]_{-1}^{\lambda}=\frac{1}{3}\lambda^3\ln(-\lambda)-\frac{1}{9}\lambda^3-\frac{1}{9}$$

$$I_2(\lambda)=\int_{\lambda}^{2}x^2\ln|x|\,dx=\int_{\lambda}^{2}x^2\ln x dx=\left[\frac{1}{3}x^3\ln(x)-\frac{1}{9}x^3\right]_{\lambda}^{2}=\frac{8}{3}\ln 2-\frac{8}{9}\lambda^3\ln\lambda+\frac{1}{9}\lambda^3$$

קל לאשר ש- $\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ <}}\lambda^3\ln(-\lambda)=0$ וש- $\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ >}}\lambda^3\ln\lambda=0$. לכן:

$$I=\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ <}}I_1(\lambda)+\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ >}}I_2(\lambda)=-\frac{1}{9}+\frac{8}{3}\ln 2-\frac{8}{9}=\frac{8}{3}\ln 2-1.$$

.6

נחשב את $I=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$. נגדיר $I(\lambda)=\int_1^{\lambda}\frac{dx}{x^2}$. אזי:

$$I(\lambda)=\int_1^{\lambda}\frac{dx}{x^2}=\left[\frac{-1}{x}\right]_1^{\lambda}=\frac{-1}{\lambda}+1 \quad\Rightarrow\quad I=\lim_{\lambda\to+\infty}(\frac{-1}{\lambda}+1)=1.$$

.7

נחשב את $I=\int_{-\infty}^{0}e^x\,dx$. נגדיר $I(\lambda)=\int_{\lambda}^{0}e^x\,dx$. אזי:

$$I(\lambda)=\int_{\lambda}^{0}e^x dx=\left[e^x\right]_{\lambda}^{0}=1-e^x \quad\Rightarrow\quad I=\lim_{\lambda\to-\infty}(1-e^{\lambda})=1.$$

.8

נחשב את $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$. נגדיר: $I_1(\lambda)=\int_{\lambda}^{0}\frac{dx}{1+x^2}$; $I_2(\mu)=\int_0^{\mu}\frac{dx}{1+x^2}$

$$I_1(\lambda)=\int_{\lambda}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=-\arctan\lambda \quad\Rightarrow\quad \lim_{\lambda\to-\infty}I_1(\lambda)=\frac{\pi}{2}$$

.9

1. נחשב את $I=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$. בשביל זה נגדיר $I(\lambda)=\int_1^{\lambda}\frac{dx}{x}$. אזי:

$$I(\lambda)=\int_1^{\lambda}\frac{dx}{x}=\left[\ln x\right]_1^{\lambda}=\ln\lambda-\ln 1=\ln\lambda \quad\Rightarrow\quad I=\lim_{\lambda\to+\infty}I(\lambda)=+\infty.$$