תזכורת:

G חבורה, $S \subseteq G$ תת קבוצה. תת החבורה הנוצרת על ידי S היא
$H = \langle S \rangle$ (תת החבורה הקטנה ביותר שמכילה את S)
האיברים של $\langle S \rangle$ הם כל האיברים של G שאפשר לקבל על ידי
מכפלות רווצרות של s, s^{-1} עבור $s \in S$

למשל: $a, b \in G$ $\quad b^{-1}ab^{13}a^{-2}bab \in \langle a,b \rangle$

דוגמה:

$$G = SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \begin{matrix} a,b,c,d \in \mathbb{Z} \\ ad-bc=1 \end{matrix} \right\} \subseteq SL_2(\mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$$

$A, B \in SL_2(\mathbb{Z})$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad o(A) = 4$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad o(B) = \infty$

טענה:

$$SL_2(\mathbb{Z}) = \langle A, B \rangle$$

הוכחה:

תהי $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ נשים לב,

$$AM = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix}$$

$$BM = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$B^n M = \begin{pmatrix} a+nc & b+nd \\ c & d \end{pmatrix}$$

נרצה להביע את M כמכפלה של A, B, A^{-1}, B^{-1}.

אם $c\neq 0$, לפי אלגוריתם אוקלידס $a=qc+r$ כאשר $|r|<|c|$

לכן $r=a-qc$

$$B^{-1}M=\begin{pmatrix}a-qc & b-qd\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r & b-qd\\ c & d\end{pmatrix}$$

$$AB^{-1}M=\begin{pmatrix}c & d\\ -r & qd-b\end{pmatrix}$$

נחזור על התהליך עד שנקבל מטריצה מהצורה:

$$AB^{-q_1}AB^{-q_2}\cdot\ldots\cdot AB^{-q_m}M=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \delta\end{pmatrix}$$

המטריצה הזו שייכת ל- $SL_2(\mathbb{Z})$

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & \beta\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\beta\\ 0 & 1\end{pmatrix}=A^2B^{-\beta}$$

או

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \beta\\ 0 & 1\end{pmatrix}=B^{\beta}$$

לכן:

$$AB^{-q_1}AB^{-q_2}\cdot\ldots\cdot AB^{-q_m}M=B^{\beta} \Rightarrow M=B^{q_m}A^{-1}\ldots B^{q_1}A^{-1}B^{\beta}$$

$$AB^{-q_1}AB^{-q_2}\cdot\ldots\cdot AB^{-q_m}M=A^2B^{-\beta} \Rightarrow M=B^{q_m}A^{-1}\ldots A^{-1}B^{q_1}AB^{-\beta}$$

הגדרה: תהי G חבורה, $a,b\in G$. הקומוטטור של a,b הינו $[a,b]=aba^{-1}b^{-1}$

אבחנות:

1) $[a,b]=e \iff aba^{-1}b^{-1}=e \iff (ab)(ba)^{-1}=e \iff ab=ba$

2) יהי $g\in G$, $[gag^{-1},gbg^{-1}]=g[a,b]g^{-1}$

וכן, $f_g:G\to G$ $(f_g(a)=gag^{-1})$ זה אוטומורפיזם של G. לכן,

$$g[a,b]g^{-1}=f_g([a,b])=f_g(aba^{-1}b^{-1})=f_g(a)f_g(b)f_g(a^{-1})f_g(b^{-1})=[f_g(a),f_g(b)]=$$
$$=[gag^{-1},gbg^{-1}]$$

הגדרה: תהי G חבורה. תת החבורה הנגזרת של G (מסומנים $[G,G]$ או G')
הינה תת החבורה הנוצרת ע"י הקבוצה $\{[a,b] : a,b\in G\}$

אבחנה:

G אבלית $\iff G' = \{e\}$

תרגיל:

הקבוצה $\{[a,b] : a,b\in G\}$ לא בהכרח סגורה לכפל (לכן לקחנו את תת החבורה הנוצרת)

דוגמא: תהי $H \leq S_{16}$ הנוצרת ע"י:

$(1\ 3)(2\ 4),\ (5\ 7)(6\ 8),\ (9\ 11)(10\ 12),\ (13\ 15)(14\ 16),\ (1\ 3)(5\ 7)(9\ 11)$

$(1\ 2)(3\ 4)(13\ 15),\ (5\ 6)(7\ 8)(13\ 14)(15\ 16),\ (9\ 10)(11\ 12)$

הוכח כי

(1) $|H|=256$.

(2) $|H'|=16$ ו- H' נוצרת ע"י ארבעת האיברים הראשונים ברשימה

אבל יש רק 15 קומוטטורים שונים

(3) $(9\ 11)(10\ 12)(13\ 15)(14\ 16)\in H'$ אבל הוא לא קומוטטור בעצמו

טענה:

תהי G חבורה. אזי

א) $G' \trianglelefteq G$

ב) תהי $N \trianglelefteq G$. אזי G/N אבלית $\iff G' \leq N$

הוכחה:

א) יהי $h\in G'$. אזי $h = [a_1,b_1]\cdot\ldots\cdot[a_n,b_n]$

יהי $g\in G$, אזי $ghg^{-1} = g[a_1,b_1]g^{-1}g[a_2,b_2]g^{-1}\ldots g^{-1}g[a_n,b_n]g^{-1} =$

$= [ga_1g^{-1}, gb_1g^{-1}]\cdot\ldots\cdot[ga_ng^{-1}, gb_ng^{-1}] \in G'$

$\left([a,b]^{-1} = (aba^{-1}b^{-1})^{-1} = bab^{-1}a^{-1} = [b,a]\right)$

ב) G/N אבלית $\iff$ לכל $a,b\in G$ $(aN)(bN)=(bN)(aN)$ $\iff$

$\iff$ לכל $a,b\in G$ $abN=baN$ $\iff$ ab,ba שייכים לאותה מחלקה של N $\iff$

$\iff$ $(ab)^{-1}(ab)\in N$ $\iff$ $[b^{-1},a^{-1}]=b^{-1}a^{-1}ba\in N$ לכל $a,b\in G$ $\iff$

$\iff$ לכל $a,b\in G$ $[(a^{-1})^{-1},(b^{-1})^{-1}]=[a,b]\in N$ $\iff$ $G'\le N$

תזכורת:

$H,N\le G$ אזי $HN=\{hn:h\in H,n\in N\}$

הוכחנו שאם $H,N\le G$ תתי חבורות של G וגם $H\le N_a(N)$ (בפרט, אם $N\trianglelefteq G$ אזי $N_a(N)=G$ ואז התנאי הנ"ל מתקיים לכל H). אזי $HN\le G$ תת חבורה

משפט: (משפט האיזומורפיזם השני)

תהי G חבורה, $H,N\le G$ שתי תתי חבורות כך ש-$H\le N_a(N)$ אזי:

א) $H\cap N\trianglelefteq H$

ב) $N\trianglelefteq HN$

ג) $H/_{H\cap N}\simeq HN/_N$

הוכחה:

א) כפי שראינו בפעם הקודמת $H\le N_a(N)$ $\iff$ $hnh^{-1}\in N$ לכל $h\in H$, $n\in N$

יהי $a\in H\cap N$, $h\in H$ אזי: $a\in N \Rightarrow hah^{-1}\in N$ כי $H\le N_a(N)$

מצד שני, $hah^{-1}\in H$ כי $a\in H$. לכן $hah^{-1}\in H\cap N \Rightarrow H\cap N\trianglelefteq H$

$(N_a(N)=\{g\in G: gN=Ng\})$

ב) $\underset{h=he}{H\le HN}$, $\underset{n=en}{N\le HN}$

לפי הנחה, $H\le N_a(N)$. גם $N\subseteq N_a(N)$ (כל תת חבורה מוכלת במנרמל שלה)

לכן $HN\le N_a(N)$, כי $N_a(N)$ תת חבורה ולכן סגורה לכפל.

כלומר ש $hnh^{-1}\in N$ לכל $h\in NH \Rightarrow N\trianglelefteq HN$

נגדיר הומומורפיזם $f: H \to HN/N$. $f(h)=hN$ לכל $h\in H$

f הומ' כי

$$f(h_1h_2) = h_1h_2N = (h_1N)(h_2N) = f(h_1)f(h_2)$$

f על: יהי $hn\in HN$ אזי $hnN = hN = f(h)$ $(h^{-1}hn = n\in N)$

יהי $h\in H$. אזי $h\in \ker f \iff f(h)=hN=\underset{e_{HN/N}}{\underset{\shortparallel}{eN}} \iff hN=eN=N \iff h\in N \iff$

$\iff h\in H\cap N$. לכן $\ker f = H\cap N$ $f(H) = HN/N$

ממשפט האיזומורפיזם הראשון, $f(H) \cong H/\ker f \Rightarrow HN/N \simeq H/H\cap N$

טענה:

יהי $f: G\to K$ הומומורפיזם.

1) לכל תת חבורה $H\leq G$, התמונה $f(H)$ הינה תת חבורה של K

(הוכחנו במקרה $H=G$)

2) תהי $L\leq K$ תת חבורה. המקור $\{g\in G : f(g)\in L\} = f^{-1}(L)$

הינה תת חבורה של G. אם $L\trianglelefteq K$ אזי $f^{-1}(L)\trianglelefteq G$ (הוכחנו למקרה $L=\{e\}$)

הוכחה של 2:

אם $g_1,g_2\in f^{-1}(L)$, אזי $f(g_1g_2)=\underbrace{f(g_1)}_{\in L}\underbrace{f(g_2)}_{\in L}\in L \Rightarrow g_1g_2\in f^{-1}(L)$

$$f(g_1^{-1}) = (f(g_1))^{-1}\in L$$

יהי $L\trianglelefteq K$, $g\in f^{-1}(L)$, $x\in G$

$$f(xgx^{-1}) = f(x)\underbrace{f(g)}_{\in L}f(x)^{-1}\in L$$

כי $L\trianglelefteq K$

קיום:

תהי $N \trianglelefteq G$. תהי $H \leq G$ תת חבורה כך ש $N \leq H$. תהי

ההטלה הטבעית $f: G \to G/N$ $\quad (f(g) = gN)$

$$f(H) = \{hN : h \in H\} = H/N \underset{\substack{\uparrow \\ \text{לפי סעיף} \\ \text{(1) מהטענה הקודמת}}}{\leq} G/N$$

משפט: (משפט האיזומורפיזם הרביעי = משפט ההתאמה)

תהי G חבורה, $N \trianglelefteq G$ תת-חבורה נורמלית. אזי יש התאמה ב"ע:

$$\left\{\begin{matrix}\text{תתי חבורות} \\ G/N \text{ של}\end{matrix}\right\} \xleftrightarrow{\text{חח"ע ועל}} \left\{\begin{matrix}\text{תתי חבורות} \\ N \leq H \leq G\end{matrix}\right\}$$

$$L \leq G/N \xmapsto{\rho} f^{-1}(L) \quad , \quad H/N = f(H) \xleftarrow{\psi} H$$

כאשר $f: G \to G/N$ היא ההטלה הטבעית.

הוכחה:

צריך להוכיח ש f ו- f^{-1} אכן הפכים זו לזו.

תהי $L \leq G/N$ רוצים להוכיח כי

$$L = \psi(\rho(L)) = \psi(f^{-1}(L)) = f(f^{-1}(L))$$

אכן ברור כי $f(f^{-1}(L)) \subseteq L$. מצד שני, ההטלה הטבעית היא על

לכן, לכל $l \in L$, קיים $g \in f^{-1}(L)$ כך ש $f(g) = l$. לכן $l = f(g) \in f(f^{-1}(L))$

וקיבלנו $L = f(f^{-1}(L))$

מצד שני, תהי $H \leq G$ כך ש $N \leq H$. רוצים להוכיח

$$H = \rho(\psi(H)) = f^{-1}(f(H))$$

ברור כי $H \leq f^{-1}(f(H))$.

יהי $g \in f^{-1}(f(H))$. לכן $f(g) \in f(H)$, כלומר קיים $h \in H$ כך ש $f(g) = f(h)$

כלומר, $hN=gN$, לפי ההגדרה של f.

כך אומר ש $g\in hN \Leftarrow g=hn$ עבור $n\in N$ כלשהו

לפי ההנחה $N\le H$, לכן $n\in H$, לכן $g=hn\in H$. סה"כ $H=f^{-1}(f(H))$

תכונות של ההתאמה:

נרשום $\bar{H}=H/N$. תהיינה $H_1,H_2\le G$ שמכילות את N. אזי:

1) $H_1\le H_2 \iff \bar{H}_1\le\bar{H}_2$

2) $H\trianglelefteq G \iff \bar{H}\trianglelefteq G/N=\bar{G}$

3) אם $H_1\trianglelefteq H_2$, אזי $[H_1:H_2]=[\bar{H}_2:\bar{H}_1]$

4) $\overline{H_1\cap H_2}=\bar{H}_1\cap\bar{H}_2$

משפט: (משפט האיזומורפיזם השלישי)

תהי G חבורה. תהיינה $N\trianglelefteq G$, $H\trianglelefteq G$, $N\le H$

אזי (לפי משפט ההתאמה) $H/N\trianglelefteq G/N$

וגם $\frac{G/N}{H/N}\simeq G/H$

$gH\longmapsto(gN)(H/N)$

הוכחה: תרגיל

הערה: תהי $H\le G$, $N\trianglelefteq G$. (לא מניחים כי $N\le H$). אם $f:G\to G/N$

הטבעית. עדיין $f(H)\le G/N$. למה מתאימה $f(H)$ תחת ההתאמה?

אבחנה:

בנוסף $N\trianglelefteq G$, לכן $H\le N_G(N)=G$. לכן $HN\le G$ תת חבורה. וגם $N\le HN$

טענה:

$f(H)=f(HN)$, לכן $f(H)=HN/N$. (בפרט), אם $N\le H$ אזי $HN=H$ ומקבלים $(f(H)=H/N)$

הוכחה:

$H \le HN$ לכן $f(H) \le f(HN)$. לכל $h \in H$, $n \in N$,

$$f(hn) = hnN \underset{(hn \in hN)}{=} hN = f(h)$$

זה אומר $f(HN) \le f(H)$