דף תרגילים 3

עקומות ב $\mathbb{R}^2$:

1. נתונה הפונקציה $y = x^3$:

א. מצא פרמטרזציה רגולרית של הגרף של הפונקציה. ושרטט את העקומה במערכת הצירים.

$\gamma(t) = (t, t^3)$ היא פרמטריזציה של הגרף שכן $x = t$ ו- $y = t^3 = x^3$. היא רגולרית כי $\gamma'(t) = (1, 3t^2) \neq (0,0)$.

ב. האם $\delta(u) = (u^2, u^6)$ פרמטרזציה רגולרית של הגרף?

היא לא רגולרית כי $\delta'(u) = (2u, 6u^5)$ ולכן $\delta'(0) = (0,0)$.

ג. מצא נוסחאות לוקטור המשיק T והווקטור הנורמל N בכל נקודה על העקומה.

הווקטור המשיק הוא $T(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{9t^4+1}}(1, 3t^2)$. בשביל למצוא את הנורמל נסובב נגד כיוון השעון ב-90 מעלות ונקבל $N(t) = \frac{1}{\sqrt{9t^4+1}}(-3t^2, 1)$.

ד. מצא את עקמומיות העקומה בעזרת הפרמטריזציה.

$\gamma''(t) = (0, 6t)$, $\det\begin{pmatrix} | & | \\ \gamma'(t) & \gamma''(t) \\ | & | \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3t^2 & 6t \end{pmatrix} = 6t$, ולכן

$$k(t) = \frac{\det\begin{pmatrix} | & | \\ \gamma'(t) & \gamma''(t) \\ | & | \end{pmatrix}}{\|\gamma'(t)\|^3} = \frac{6t}{\sqrt{9t^4+1}^3}$$

ה. מצא את עקמומיות העקומה בעזרת נוסחת Bateman. תזכורת לנוסחאת Bateman:

$$|k(x,y)| = \left| \frac{F''_{xx}{F'_y}^2 + F''_{yy}{F'_x}^2 - 2F''_{xy}F'_xF'_y}{\sqrt{\left({F'_x}^2 + {F'_y}^2\right)^3}} \right|$$

נסמן $F(x,y) = y - x^3$ ואז העקומה שלנו היא $F(x,y) = 0$. נחשב:

$F'_x = -3x^2, F'_y = 1, F''_{xx} = -6x, F''_{xy} = F''_{yy} = 0$ ולכן:

$$|k(x,y)| = \left| \frac{-6x \cdot 1^2 + 0 \cdot (-3x^2)^2 - 2 \cdot 0 \cdot (-3x^2) \cdot 1}{\sqrt{\left((-3x^2)^{2^2} + 1^2\right)^3}} \right|$$

$$= \left| \frac{-6x}{\sqrt{9x^4+1}^3} \right| = \frac{6|x|}{\sqrt{9x^4+1}^3}$$

ועבור $(x,y) = \gamma(t) = (t, t^3)$ אכן $|k(t)| = \frac{6|t|}{\sqrt{9t^4+1}^3} = |k(x,y)|$.

ו. מהי העקמומיות המינימאלית (בערך מוחלט) של העקומה, ועל איזה נקודה היא מתקבלת?

לפי הנוסחא ב- $|k(0)| = 0$ ולכל $t \neq 0$: $|k(t)| > 0$ ולכן המינימום מתקבל ב- $\gamma(0) = (0,0)$.

2. תהי פונקציה $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{3}\sqrt{(2+x^2)^3}$. מצא פרמ' במהירות יחידה לעקומה זאת.

הפרמ' הראשונה שניקח היא $\gamma(t)=\left(t,\frac{1}{3}\sqrt{(2+t^2)^3}\right)$. הנגזרת שלה היא

$\gamma'(t)=\left(1,\frac{1}{3}\cdot\frac{3(2+t^2)^2\cdot 2t}{2\sqrt{(2+t^2)^3}}\right)=\left(1,t\sqrt{(2+t^2)}\right)$. ולכן . המהירות שלה היא

$\|\gamma'(t)\|=\sqrt{1+t^2(2+t^2)}=\sqrt{t^4+2t^2+1}=t^2+1$.

מ- $t=0$ עד $t=x$ היא עוברת מרחק של $s(x)=\int_0^x\|\gamma'(t)\|dt=\int_0^x(t^2+1)dt=\frac{x^3}{3}+x$

אנחנו מחפשים פונקציה הפוכה $x(s)$, היא קיימת כי $s(x)=\frac{x^3}{3}+x$ מונוטונית עולה ולכן חח"ע.

אנחנו יודעים ש $s(0)=0$ ולכן הפונקציה ההפוכה תקיים $x(0)=x\big(s(0)\big)=0$. בנוסף אם

$s'(x)=\ x^2+1$ אז לפי משפט הנגזרת של פונקציה הפוכה $x'\big(s(x)\big)=\frac{1}{s'(x)}$...

3. הוכיחו שלעקומה $\gamma(t)$ (במישור או במרחב) יש מהירות קבועה אם ורק אם $\gamma''(t)$ מאונך ל- $\gamma'(t)$.

לעקומה יש מהירות קבועה אם ורק אם $\|\gamma'(t)\|$ קבוע. וזה נכון אם ורק אם

$\|\gamma'(t)\|^2=\langle\gamma'(t),\gamma'(t)\rangle$ קבוע, וזה נכון אם ורק אם $\langle\gamma'(t),\gamma'(t)\rangle'=0$. אבל

$\langle\gamma'(t),\gamma'(t)\rangle'=2\langle\gamma'(t),\gamma''(t)\rangle$ ולכן לעקומה יש מהירות קבועה אם ורק אם

$\langle\gamma'(t),\gamma''(t)\rangle=0$ וזה בדיוק אומר ש- $\gamma''(t)$ מאונך ל- $\gamma'(t)$.

4. חשב את עקמומיות העקומה γ המוגדרת ע"י המשוואה (היעזר בנוסחת Bateman)

א. $ax^2+by^2=1$

נסמן $F(x,y)=ax^2+by^2-1$ ואז העקומה שלנו היא $F(x,y)=0$. נחשב:

$F'_x=2ax, F'_y=2by, F''_{xx}=2a, F''_{xy}=0, F''_{yy}=2b$ ולכן:

$$|k(x,y)|=\left|\frac{2a\cdot(2by)^2+2b\cdot(2ax)^2-2\cdot 0\cdot(2ax)\cdot(2by)}{\sqrt{(4a^2x^2+4b^2y^2)^3}}\right|$$
$$=\left|\frac{8ab^2y^2+8ba^2x^2}{8\sqrt{(a^2x^2+b^2y^2)^3}}\right|=\left|\frac{ab^2y^2+ba^2x^2}{\sqrt{(a^2x^2+b^2y^2)^3}}\right|$$

סימן העקמומיות תלוי בכיוון שבו אנחנו מתקדמים על העקומה.

ב. $x^2+y^2+4y+1=2x$

נסמן $F(x,y)=x^2+y^2-2x+4y+1$ ואז העקומה שלנו היא $F(x,y)=0$. נחשב:

$F'_x=2x-2, F'_y=2y+4, F''_{xx}=2, F''_{xy}=0, F''_{yy}=2$ ולכן:

$$|k(x,y)|$$
$$=\left|\frac{2\cdot(2y+4)^2+2\cdot(2x-2)^2-2\cdot 0\cdot(2x-2)\cdot(2y+4)}{\sqrt{((2x-2)^2+(2y+4)^2)^3}}\right|$$
$$=\left|\frac{8x^2-16x+8+8y^2+32y+32}{\sqrt{(4x^2-8x+4y^2+16y+20)^3}}\right|$$
$$=\left|\frac{8(x^2-2x+y^2+4y+5)}{8\sqrt{(x^2-2x+y^2+4y+5)^3}}\right|=\left|\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+y^2+4y+5}}\right|$$

שוב, הסימן תולי בכיוון ההתקדמות.

5. חשב את העקמומיות של העקומות הבאות:

א. $\gamma(t)=(t,\cosh t)$

$\gamma(t)=(t,\cosh t)$, $\gamma'(t)=(1,\sinh t)$, $\gamma''(t)=(0,\cosh t)$ ו-

$\|\gamma'(t)\|=\sqrt{1+\sinh^2 t}=\sqrt{\cosh^2 t}=\cosh t$ כי $\cosh t>0$ תמיד.

ולכן $\det\begin{pmatrix} | & | \\ \gamma'(t) & \gamma''(t) \\ | & | \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} = \cosh t$

$.k(t) = \dfrac{\det\begin{pmatrix} | & | \\ \gamma'(t) & \gamma''(t) \\ | & | \end{pmatrix}}{\|\gamma'(t)\|^3} = \dfrac{\cosh t}{\cosh^3 t} = \dfrac{1}{\cosh^2 t} = \dfrac{4}{e^{2t}+2+e^{-2t}}$

ב. $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$

$\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $\gamma'(t) = (-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t)$,

$\gamma''(t) = (6\cos t \sin^2 t - 3\cos^3 t, 6\sin t \cos^2 t - 3\sin^3 t)$, ו-

$$\|\gamma'(t)\| = 3\sqrt{\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t} = 3\sqrt{(\cos^2 t + \sin^2 t)\cos^2 t \sin^2 t}$$
$$= 3\sqrt{\cos^2 t \sin^2 t} = 3|\cos t \sin t|$$

$$\det\begin{pmatrix} | & | \\ \gamma'(t) & \gamma''(t) \\ | & | \end{pmatrix} = 9\det\begin{pmatrix} -\cos^2 t \sin t & 2\cos t \sin^2 t - \cos^3 t \\ \sin^2 t \cos t & 2\sin t \cos^2 t - \sin^3 t \end{pmatrix}$$
$$= 9(\cos^2 t \sin^4 t - 2\cos^4 t \sin^2 t - 2\cos^2 t \sin^4 t + \cos^4 t \sin^2 t)$$
$$= -9(\cos^2 t \sin^4 t + \cos^4 t \sin^2 t)$$
$$= -9(\cos^2 t + \sin^2 t)\cos^2 t \sin^2 t = -9\cos^2 t \sin^2 t$$

ולכן $.k(t) = \dfrac{-9\cos^2 t \sin^2 t}{27|\cos t \sin t|^3} = \dfrac{1}{3|\cos t \sin t|}$

6. חשב את העקמומיות הכוללת של העקומות:

א. $\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t)$, $0 \le \phi \le 2\pi$

טעיתי בשאלה, על תענו.

ב. γ פרמ' במהירות יחידה של פתרון המשוואה $.5x^2 + 3xy + 5y^2 = 1$

לפי המשפט על עקמומיות כוללת, היא שווה מספר הפעמים שהעקומה $T(s)$ מסתובבת סביב 0 כפול 2π. כאשר עושים סיבוב לאורך האליפסה העקום המשיק גם כן מסתובב פעם אחת. ראה איור:

יוצא אם כן שבערך מוחלט האינטגרל $\left|\int_0^L k(s)ds\right| = 2\pi$. כמו קודם הסימן תלוי בכיוון ההתקדמות של העקומה. אותו פתרון יהיה נכון לכל משוואת אליפסה.

ג. γ פרמ' במהירות יחידה של פתרון המשוואה

$.(x^2 + 6x + y^2 - 4y + 12)(x^2 - 6x + y^2 + 4y + 12) = 0$

זו שאלה מאין מכשילה. הפתרון של המשוואה הוא האיחוד הזר של הפרונות של המשוואות $x^2 + 6x + y^2 - 4y + 12 = 0$ ו- $x^2 - 6x + y^2 + 4y + 12 = 0$. לכל אחד מהם הוא אליפסה (למעשה מעגל, אבל מעגל זה מקרה פרטי של אליפסה) עם עקמומיות כוללת 2π. אז "העקמומיות הכוללת של האיחוד" היא סכום העקמומיות הכוללות של המעגלים. $2\pi + 2\pi = 4\pi$.

ד. γ פרמ' במהירות יחידה של פתרון המשוואה

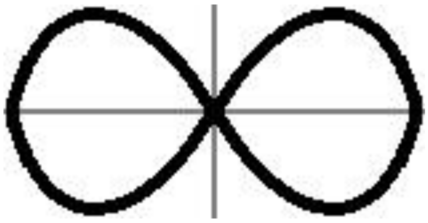
$.(x^2 + y^2 - 1)(2x^2 + 2y^2 - 1) \cdot \ldots \cdot (nx^2 + ny^2 - 1) = 0$

n מספר שלם חיובי.

פה יש n מעגלים זרים, ולכן העקמומיות הכוללת היא $.n \cdot 2\pi = 2\pi n$

7. חקור את העקומה $\varphi(t) = \left(\cos t, \frac{1}{2}\sin 2t\right)$, $.0 \le t \le 2\pi$

א. צייר אותה.



ב. חשב T, N ועקמומיות.

כרגיל $\varphi'(t) = (-\sin t, \cos 2t)$, $\|\varphi'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 2t}$,

ו- $T(t) = \frac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 2t}}(-\sin t, \cos 2t)$

$N(t) = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 2t}}(-\cos 2t, -\sin t)$

בקשר לעקמומיות $\varphi''(t) = (-\cos t, -2\sin 2t)$,

$$\det\begin{pmatrix} | & | \\ \gamma'(t) & \gamma''(t) \\ | & | \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} -\sin t & -\cos t \\ \cos 2t & -2\sin 2t \end{pmatrix} = (\cos t - \cos 3t) + \frac{\cos t + \cos 3t}{2}$$

$$= \frac{3}{2}\cos t - \frac{1}{2}\cos 3t$$

ולכן $k(t) = \frac{3\cos t - \cos 3t}{2\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 2t}^3}$.

ג. מה עם מהירות יחידה?

$\|\varphi'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 2t}$ לא סימפתי, לא כדאי לנסות לשים אותו באינטגרל.

ד. מצא את $\int_0^{2\pi} k(t)dt$, האם יש סיבה תיאורתית לתוצאה הזאת.

מפחיד, הא? אתם לא אמורים ממש לחשב את זה כאינטגרל, במקום זה נשתמש בטריק.

א) כל הפונקציות הטריגונומטריות הן 2π מחזוריות. ולכן $k(t) = k(t - 2\pi)$ ולכן

$$\int_0^{2\pi} k(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} k(t)dt + \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} k(t)dt + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} k(t)dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} k(t)dt + \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} k(t)dt + \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{0} k(t)dt$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} k(t)dt + \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} k(t)dt = \int_0^{\pi} k\left(t - \frac{\pi}{2}\right)dt + \int_0^{\pi} k\left(t + \frac{\pi}{2}\right)dt =$$

$$= \int_0^{\pi} k\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + k\left(t + \frac{\pi}{2}\right)dt$$

ב) נחשב:

$$k\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(3t - \frac{3\pi}{2}\right)}{2\sqrt{\sin^2\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \cos^2(2t - \pi)}^3} = \frac{3\sin t + \sin 3t}{2\sqrt{(-\cos t)^2 + (-\cos 2t)^2}^3}$$

$$= \frac{3\sin t + \sin 3t}{2\sqrt{\cos^2 t + \cos^2 2t}^3}$$

$$k\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(3t+\frac{3\pi}{2}\right)}{2\sqrt{\sin^2\left(t+\frac{\pi}{2}\right)+\cos^2(2t+\pi)}^3}=\frac{-3\sin t-\sin 3t}{2\sqrt{\cos^2 t+(-\cos 2t)^2}^3}$$
$$=-\frac{3\sin t+\sin 3t}{2\sqrt{\cos^2 t+\cos^2 2t}^3}=-k\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$$

ולכן $k\left(t-\frac{\pi}{2}\right)+k\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=0$ ו- $\int_0^{2\pi}k(t)dt=\int_0^{\pi}k\left(t-\frac{\pi}{2}\right)+k\left(t+\frac{\pi}{2}\right)dt=0$

בקשר לסיבה תיאורית – אין. אם חשבתם שזה בגלל המשפט על עקמומיות כוללת, זה לא. המשפט הזה פועל רק כאשר העקומה במהירות יחידה.

עקומות ב $\mathbb{R}^3$:

8. נתונה עקומה $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י הפרמטרזציה $\gamma(t)=(\cos t\,,t,\sin t-3)$
   א. חשב את מהירות העקומה.

$\gamma'(t)=(-\sin t\,,1,\cos t)$, $\|\gamma'(t)\|=\sqrt{\sin^2 t+1+\cos^2 t}=\sqrt{2}$

   ב. חשב את אורך העקומה.

$$\int_0^{2\pi}\|\gamma'(t)\|dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{2}dt=2\sqrt{2}\pi$$

   ג. נתונה פונקציה $t:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to[0,2\pi]$, $t(s)=4s$. איך שינוי הפרמטריזציה $\tilde{\gamma}(s)=\gamma\big(t(s)\big)$ ישפיע על אורך העקומה?

זה לא, שינוי פרמ' לא יכול להשפיע על אורך העקומה. ואכן

$$\int_0^{2\pi}\|\gamma'(t)\|dt=\int_0^{2\pi}\|\gamma'\big(t(s)\big)\|t'(s)ds=\int_0^{2\pi}\|t'(s)\gamma'\big(t(s)\big)\|ds$$
$$=\int_0^{2\pi}\|\tilde{\gamma}'(s)\|ds$$

השיוויון השני נובע מכך ש- $t'(s)$ סקאלר חיובי. השלישי הוא סתם כלל השרשרת, וקיבלנו שהאורך של העקומה לפי שתי הפרמטריזציות שווה. זה תמיד נכון.

   ד. מצא פרמטרזציה במהירות יחידה לעקומה $\gamma(t)$.

אם $\|\gamma'(t)\|=\sqrt{2}$ אז בין זמן 0 ל- x העקומה תעבור מרחק $s(x)=\int_0^x\sqrt{2}dt=\sqrt{2}x$, ולכן היא תעבור מרחק s בזמן $x(s)=\frac{s}{\sqrt{2}}$. הפרמ' המבוקשת היא $\tilde{\gamma}(s)=\gamma\big(x(s)\big)=\gamma\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)$.

9. הראה שהעקומות הבאות נתונות בפרמטרזצית יחידה וחשב את העקמומיות והפיתול שלהן
   א. $\gamma(t)=\left(\frac{1}{3}\sqrt{(1+t)^3},\frac{1}{3}\sqrt{(1-t)^3},\frac{t}{\sqrt{2}}\right)$

$\gamma'(t)=\left(\frac{1}{2}\sqrt{(1+t)},-\frac{1}{2}\sqrt{(1-t)},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\|\gamma'(t)\|=\sqrt{\frac{1+t}{4}+\frac{1-t}{4}+\frac{1}{2}}=1$, ולכן העקומה בפרמטריזציה טבעית.

$\gamma''(t)=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{(1+t)}},-\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2\sqrt{(1-t)}},0\right)=\left(\frac{1}{4\sqrt{(1+t)}},\frac{1}{4\sqrt{(1-t)}},0\right)$,

בפרמ' טבעית: $k(t)=\|\gamma''(t)\|=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}}=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1-t+1+t}{1-t^2}}=\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{1-t^2}}$,

ולכן $\gamma'''(t)=\left(\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{(1+t)}^3},\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{-1}{\sqrt{(1-t)}^3},0\right)=\left(-\frac{1}{8\sqrt{(1+t)}^3},\frac{1}{8\sqrt{(1-t)}^3},0\right)$

$$\det\begin{pmatrix} | & | & | \\ \gamma'(t) & \gamma''(t) & \gamma'''(t) \\ | & | & | \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} * & \frac{1}{4\sqrt{(1+t)}} & -\frac{1}{8\sqrt{(1+t)}^3} \\ * & \frac{1}{4\sqrt{(1-t)}} & \frac{1}{8\sqrt{(1-t)}^3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{64}\det\begin{pmatrix} \frac{1+t}{\sqrt{(1+t)}^3} & -\frac{1}{\sqrt{(1+t)}^3} \\ \frac{1-t}{\sqrt{(1-t)}^3} & \frac{1}{\sqrt{(1-t)}^3} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{64}\frac{1+t+1-t}{\sqrt{(1+t)(1-t)}^3}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{32\sqrt{1-t^2}^3}$$

ו- $\tau(t) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{32\sqrt{1-t^2}^3}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{1-t^2}}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}\cdot 16\cdot(1-t^2)}{32\cdot 2\cdot\sqrt{1-t^2}^3} = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{1-t^2}}$.

ב. $\gamma(t) = \left(\frac{4}{5}\cos t, 1-\sin t, -\frac{3}{5}\cos t\right)$

$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\frac{16}{25}\sin^2 t + \cos^2 t + \frac{9}{25}\sin^2 t} = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$, ולכן העקומה בפרמטריזציה טבעית.

$\gamma''(t) = \left(-\frac{4}{5}\cos t, \sin t, \frac{3}{5}\cos t\right)$,

בפרמ' טבעית: $k(t) = \|\gamma''(t)\| = \sqrt{\frac{16}{25}\cos^2 t + \sin^2 t + \frac{9}{25}\cos^2 t} = 1$,

$\gamma'''(t) = \left(\frac{4}{5}\sin t, \cos t, -\frac{3}{5}\sin t\right) = -\gamma'(t)$ ולכן

$$\det\begin{pmatrix} | & | & | \\ \gamma'(t) & \gamma''(t) & \gamma'''(t) \\ | & | & | \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} | & | & | \\ \gamma'(t) & \gamma''(t) & \gamma'(t) \\ | & | & | \end{pmatrix} = 0$$

ו- $\tau(t) = \frac{\det(\dots)}{k^2(t)} = 0$.

10. חקור את העקומות הבאות – בדוק אם יש להן פר"מ מהירות יחידה שניתן למצוא בזמן סביר, מצא T, N, B, עקמומיות ופיתול, ונסה לצייר אותן.

בתכל'ס באף סעיף לא צריך למצוא מהירות יחדה, זה תמיד ארוך מידי.

בנוסף התרגיל ארוך מידי. תנסו לפתור אותו אם יש לכם זמן אבל הוא לא משקף אורך של תרגילים בבוחן או מבחן.

א. $\gamma(t) = (at\cos t, at\sin t, \ln t)$. (שימו לב ש $t > 0$, אחרת $\ln t$ לא מוגדר)

$\gamma'(t) = \left(a\cos t - at\sin t, a\sin t + at\cos t, \frac{1}{t}\right)$,

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(a\cos t - at\sin t)^2 + (a\sin t + at\cos t)^2 + \frac{1}{t^2}}$$

$$= \sqrt{a^2(\cos^2 t + t^2\sin^2 t - 2t\sin t\cos t + \sin^2 t + t^2\cos^2 t + 2t\sin t\cos t) + \frac{1}{t^2}}$$

$$= \sqrt{a^2(1+t^2) + \frac{1}{t^2}} = \frac{\sqrt{a^2t^4 + t^2 + a^2}}{t}$$

$$N(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{a^2t^4 + t^2 + a^2}}(at\cos t - at^2\sin t, at\sin t + at^2\cos t, 1)$$

$$\gamma''(t) = \left(a\cos t - a\sin t - at\cos t, a\sin t + a\cos t - at\sin t, \frac{-1}{t^2}\right)$$

$$\gamma'(t)\times\gamma''(t) = \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} a\sin t + at\cos t & \frac{1}{t} \\ a\sin t + a\cos t - at\sin t & \frac{-1}{t^2} \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} a\cos t - at\sin t & \frac{1}{t} \\ a\cos t - a\sin t - at\cos t & \frac{-1}{t^2} \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} a\cos t - at\sin t & a\sin t + at\cos t \\ a\cos t - a\sin t - at\cos t & a\sin t + a\cos t - at\sin t \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a\frac{t^2\sin t - \sin t - t\sin t - 2t\cos t}{t^2} \\ a\frac{2t\sin t - \cos t - t\cos t + t^2\cos t}{t^2} \\ a^2\begin{pmatrix} \cos^2 t + \cos t\sin t - 2t\cos t\sin t - t\sin^2 t + t^2\sin^2 t \\ -\cos t\sin t + \sin^2 t + 2t\cos t\sin t - t\cos^2 t + t^2\cos^2 t \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a\frac{t^2\sin t - \sin t - t\sin t - 2t\cos t}{t^2} \\ a\frac{2t\sin t - \cos t - t\cos t + t^2\cos t}{t^2} \\ a^2(1 - t + t^2) \end{pmatrix}$$

$$\ldots\|\gamma'(t)\times\gamma''(t)\| = \frac{a^2}{t^2}\sqrt{a^2t^4(1-t+t^2)^2 + t^4 + 5t^2 + 1 + 2(\quad)}$$

ב. $\gamma(t) = \big((3+\cos t)\cos 3t, (3+\cos t)\sin 3t, \sin t\big)$.

$$\gamma'(t) = (-\sin t\cos 3t - 3(3+\cos t)\sin 3t, -\sin t\sin 3t + 3(3+\cos t)\cos 3t, \cos t)$$

$$\|\gamma'(t)\|$$
$$= \sqrt{(-\sin t\cos 3t - 3(3+\cos t)\sin 3t)^2 + (-\sin t\sin 3t + 3(3+\cos t)\cos 3t)^2 + \cos^2 t}$$
$$= \sqrt{\begin{array}{c}\sin^2 t\cos^2 3t + 6\sin t\cos 3t\,(3+\cos t)\sin 3t + 9(3+\cos t)^2\cos^2 3t\\ +\sin^2 t\sin^2 3t - 6\sin t\cos 3t\,(3+\cos t)\sin 3t + 9(3+\cos t)^2\sin^2 3t + \cos^2 t\end{array}}$$
$$= \sqrt{\sin^2 t\,(\sin^2 3t + \cos^2 3t) + 9(3+\cos t)^2(\sin^2 3t + \cos^2 3t) + \cos^2 t}$$
$$= \sqrt{\sin^2 t + 9(3+\cos t)^2 + \cos^2 t} = \sqrt{82 + 54\cos t + 9\cos^2 t}$$

זה נמשך כמו הסעיף הקודם, רק חישוב ארוך.

ג. העקומה המוגדרת ע"י המשוואות: $x^2+y^2+z^2=1$ ו-$y=x^2$.

אולי תרצו להשתמש בפרמ' $\gamma(t)=\left(t,t^2,\sqrt{1-t^2-t^4}\right)$, אבל היא עוברת רק על חצי מהעקומה – החצי השני הוא $\gamma(t)=\left(t,t^2,-\sqrt{1-t^2-t^4}\right)$. צריך לבדוק לשניהם.

11. הוכח שכל מסילה $\gamma(s)$ במהירות יחידה עם עקמומיות $k>0$ ופיתול τ קבועים היא מהצורה $\gamma(s)=P+\cos\frac{s}{a}A+\sin\frac{s}{a}B+sC$ עבור איזשהם וקטורים אורתוגונליים A,B,C עם $\|A\|=\|B\|$ ואיזשהו $P\in\mathbb{R}^3$. רמזים:

א. השתמש במשוואות פרנה בשביל להוכיח ש- $\tau T+kB$ וקטור קבוע, הוא יהיה C.

משוואת פרנה הראשונה $T'(s)=kN(s)$ והשלישית $B'(s)=-\tau N(s)$ נותנות ביחד ש-
$$\tau T'(s)+kB'(s)=\tau kN(s)-k\tau N(s)=0$$
ולכן $\tau T(s)+kB(s)$ קבוע. נקרא לו C.

ב. אז הגדירו עקומה חדשה $\delta(s)=\gamma(s)-sC$, זכרו שבניגוד ל- $\gamma(s)$, $\delta(s)$ לא חייבת להיות במהירות יחידה. הראו ש- $\delta''(s)$ מאונך ל- $\delta'(s)$, והסיקו של- $\delta(s)$ יש מהירות קבועה (שאלה 3).

בגלל ש- C קבוע ניתן לגזור רגיל. $\delta'(s)=\gamma'(s)-C$ ו- $\delta''(s)=\gamma''(s)$.

לפי ההגדרה $\gamma'(s)=T(s)$ ו- $C=\tau T(s)+kB(s)$ ולכן $\delta'(s)=(1-\tau)T(s)+kB(s)$.

בנוסף לפי ההגדרה $\delta''(s)=\gamma''(s)=kN(s)$.

כזכור לכל s $\{T(s),N(s),B(s)\}$ בסיס אורתונורמלי ובפרט $\langle T(s),N(s)\rangle=\langle B(s),N(s)\rangle=0$ ולכן
$$\langle\delta'(s),\delta''(s)\rangle=\langle(1-\tau)T(s)+kB(s),kN(s)\rangle$$
$$=(1-\tau)k\langle T(s),N(s)\rangle+k^2\langle B(s),N(s)\rangle=0$$
לפי שאלה 3 ל- $\delta(s)$ יש מהירות קבועה.

ג. הוכיחו שיש ל- δ עקמומיות קבועה.

נמצא ל- δ פרמ' טבעית. יש לה מהירות קבועה $c=\|\delta'(s)\|$ ולכן מ- $s=0$ עד $s=x$ היא עוברת מרחק של $u(x)=\int_0^x c\,dt=cx$. הפונקציה ההפוכה היא $x(u)=\frac{u}{c}$ ולכן $\tilde{\delta}(u)=\delta\big(x(u)\big)=\delta\left(\frac{u}{c}\right)$ פרמ' במהירות יחידה.

לפי כלל השרשרת $\tilde{\delta}'(u)=\left(\delta\left(\frac{u}{c}\right)\right)'=\frac{1}{c}\delta'\left(\frac{u}{c}\right)$ ו-
$\tilde{\delta}''(u)=\left(\frac{1}{c}\delta'\left(\frac{u}{c}\right)\right)'=\frac{1}{c^2}\delta''\left(\frac{u}{c}\right)=\frac{1}{c^2}\gamma''\left(\frac{u}{c}\right)$. ולכן $\|\tilde{\delta}''(u)\|=\frac{1}{c^2}\left\|\gamma''\left(\frac{u}{c}\right)\right\|=\frac{k}{c^2}$.

זו העקמומיות של $\tilde{\delta}$ ב- u (ז"א, שזו העקמומיות של δ ב- $\frac{u}{c}$) והיא קבועה.

ד. הוכיחו שהפיתול של δ הוא 0.

בגלל ש- $\tilde{\delta}''(u)=\frac{1}{c^2}\gamma''\left(\frac{u}{c}\right)$,$\tilde{\delta}'''(u)=\frac{1}{c^2}\gamma''\left(\frac{u}{c}\right)$ $\tilde{\delta}'''(u)=\left(\frac{1}{c^2}\gamma''\left(\frac{u}{c}\right)\right)'=\frac{1}{c^3}\gamma'''\left(\frac{u}{c}\right)$.
כזכור $\tilde{\delta}''(u)=\frac{1}{c^2}\gamma''\left(\frac{u}{c}\right)$ ו- $\tilde{\delta}'(u)=\frac{1}{c}\delta'\left(\frac{u}{c}\right)=\frac{1}{c}\gamma'\left(\frac{u}{c}\right)-\frac{1}{c}C$.
לפי נוסחאת הפיתול מספיק להוכיח ש-

$$\det\begin{pmatrix} | & | & | \\ \tilde{\delta}'(u) & \tilde{\delta}''(u) & \tilde{\delta}'''(u) \\ | & | & | \end{pmatrix}=0$$

$$\det\begin{pmatrix} | & | & | \\ \tilde{\delta}'(u) & \tilde{\delta}''(u) & \tilde{\delta}'''(u) \\ | & | & | \end{pmatrix}=\frac{1}{c^6}\det\begin{pmatrix} | & | & | \\ \gamma'\left(\frac{u}{c}\right)-C & \gamma''\left(\frac{u}{c}\right) & \gamma'''\left(\frac{u}{c}\right) \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{c^6}\det\begin{pmatrix} | & | & | \\ \gamma'(s)-C & \gamma''(s) & \gamma'''(s) \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

$\gamma'(s)=T(s)$,$C=\tau T(s)+kB(s)$,$\gamma''(s)=kN(s)$ לפי הגדרה ואם נגזור נקבל

$$\gamma'''(s)=kN'(s)=-k^2T(s)+k\tau B(s)$$

$$\det\begin{pmatrix} | & | & | \\ \gamma'(s)-C & \gamma''(s) & \gamma'''(s) \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

$$=\det\begin{pmatrix} | & | & | \\ (1-\tau)T(s)+kB(s) & kN(s) & k^2T(s)-k\tau B(s) \\ | & | & | \end{pmatrix}=$$

זה אמור להתאפס וזה לא, אז יש לי טעות חישוב איפשהו. לא יהיה לי זמן לתקן את זה עד הבוחן. בכל מקרה זה מראה לכם איך אמורים לפתור שאלות כאלה.

אז במניתן מיד למצוא פרמ' במהירות יחידה $\tilde{\delta}(u)=\delta(u(s))=\delta\left(\frac{s}{c}\right)$ נגדיר $u(s)=\frac{s}{c}$ נשנה את

ה. הסיקו מהתרגול שהיא בתוך מישור, ושהיא מעגל הנע במהירות קבועה – מה שיאמר שהיא מהצורה $P+\cos\frac{s}{a}A+\sin\frac{s}{a}B$ כאשר P מרכז המעגל ו- A,B וקטורים אורתוגונליים באותו אורך שפורשים את המישור עליו $\delta(s)$ נמצאת.

זה מיידי. עם הפיתול מתאפס העקומה על מישור. עם העקמומיות קבועה ואינה 0 העקומה מעגל. וזו נוסחאת מעגל במרחב.