תרגיל 13

1. תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. הוכיחו כי אם $\lim_{n\to\infty} a_n$ קיים, אז הוא יחיד.
2. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:
   (א) אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$סדרה חסומה, אזי היא סדרת קושי.
   (ב) אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$סדרת קושי , אזי היא חסומה.
3. תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה כך שמתקיים $|a_n - a_{n-1}| < p^n$ עבור $0 < p < 1$. הוכיחו כי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת קושי.
4. עבור הסדרות הבאות מצאו את הגבולות החלקיים של הסדרה:
   (א) $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$
   (ב) $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$
5. הוכיחו לפי היינה כי הגבול $\lim_{x\to 0} \sin\left(e^{\frac{1}{x}}\right)$ לא קיים.
6. תהי

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

   חשבו את הגבול בנקודות בהן הוא קיים, ואחרת, הוכיחו כי הוא לא קיים בעזרת הגדרת הגבול לפי היינה.
   רמז: השתמשו בגבול מהתרגול: $\lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor n\cdot a \rfloor}{n} = a$
7. קבעו התכנסות של הטורים הבאים:
   (א)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$$

   (ב)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+3n+4}}$$

   (ג)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+n^2}$$

   (ד)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-3n}$$