הרצאה XII- מכניקה

השאלה מהרצאה קודמת: $\dot{x}_1(0)=V_0\hat{x}, x_1(0)=0, x_2(0)=l$

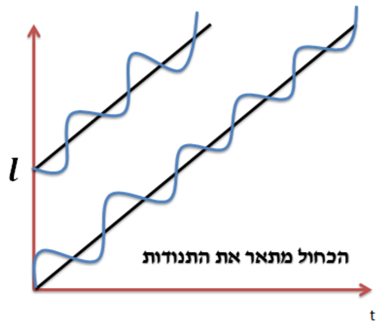
מרכז המסה של המערכת נתון ע"י $x_{CM}(\mathrm{t})=\frac{m_2}{m_T}l+\frac{m_1v_0}{m_T}t$. כמו כן אמרנו $\frac{(x_1-x_2)m_2}{m_T}=y_1=x_1-x_{CM}$. קיבלנו כי מתקיים $y_2=-\frac{m_1}{m_2}y_1$. וגם $y_1(0)=-\frac{lm_2}{m_t}, \dot{Y}_1(0)=V_0\frac{m_2}{m_T}$.

הצבנו גם בחוק הוק: נפתח כדי לקבל $\vec{F}_{1,2}=k(x_2-x_1-l)\hat{x}=k\left(-y_1\frac{m_1+m_2}{m_2}-l\right)=m_1\ddot{y}_1$.

וקיבלנו: $\ddot{y}_1m_1=-k\frac{m_T}{m_2m_1}\underbrace{\left[y_1+\frac{lm_2}{m_T}\right]}_{\equiv Z}$, ויש לנו משוואה דיפרנציאלית מסוג: $\ddot{Z}=-k\frac{m_T}{m_2m_1}\mathrm{Z}$. נגדיר את Z בדרך הבאה $Z=Acos(\omega t)+Bsin(\omega t)$. נגזור פעמיים ונקבל $\ddot{Z}=-\omega^2Z$. אפשר מיידית למצוא ש-$\omega=\sqrt{k\frac{m_T}{m_2m_1}}$. פרמטר זה מסמל את התנודות של המערכת. נסמן את $\mu=\frac{m_2m_1}{m_2+m_1}$ ונקרא לו מסה אפקטיבית.

נניח כי $m_1\gg m_2$: $\mu=\frac{m_2m_1}{m_2+m_1}\approx m_2$. או במקרה $m_1=m_2$: $\mu=\frac{m_2m_1}{m_2+m_1}=\frac{m_2}{2}$. ניתן להציב ולקבל $\omega=\sqrt{\frac{k}{\mu}}$.

נוסחא שמוכרת לנו מהתיכון, תנועה הרמונית. כעת נותר לנו למצוא את שתי הקבועים האחרים, איך נמצא אותם? ע"י הצבה של תנאי ההתחלה של הבעיה. $Z(0)=0, \dot{Z}(0)=V_0\frac{m_2}{m_T}$, נציב ונקבל כי $0=A$. וגם $\mathrm{B}=V_0\frac{m_2}{m_T\omega}$. נציב הכל בפתרון הכללי ונקבל $y_1(t)=V_0\frac{m_2}{m_T\omega}\sin(\omega t)-\frac{lm_2}{m_T}$ פונקציה המתארת את המיקום ביחס למרכז המסה של הגוף הראשון.



וגם נקבל $x_1(t)=V_0\frac{m_2}{m_T\omega}\sin(\omega t)+\frac{m_1v_0}{m_t}t$. פונקציה המתארת את מיקום הגוף הראשון.

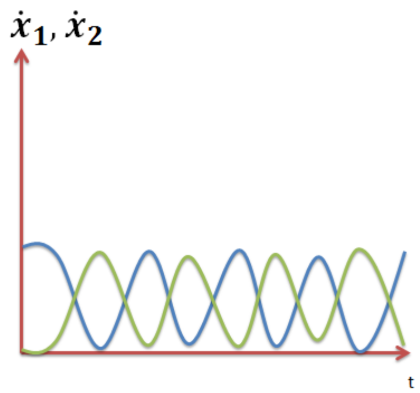
עבור המסה השנייה: $y_2(t)=-V_0\frac{m_1}{m_T\omega}\sin(\omega t)+\frac{lm_1}{m_T}$.

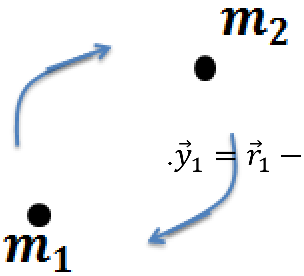
וגם $x_2(t)=\underbrace{\frac{lm_2+lm_1}{m_t}}_{l}-V_0\frac{m_1}{m_T\omega}\sin(\omega t)+\frac{m_1v_0}{m_t}t=l-V_0\frac{m_1}{m_T\omega}\sin(\omega t)+\frac{m_1v_0}{m_t}t$. הגרף שמתאר את שני התנועות מופיע שתי שורות למעלה. $m_1\gg m_2$: $x_1(t)=V_0\underbrace{\frac{m_2}{m_T\omega}}_{\approx 1}\sin(\omega t)+\underbrace{\frac{m_1v_0}{m_t}}_{\approx 0}t=\frac{V_0}{\omega}\sin(\omega t)$.

כעת נביט במקרה שבו שתי המסות זהות (שוות). $\dot{x}_1=\frac{1}{2}V_0cos(\omega t)+\frac{1}{2}V_0=\frac{V_0}{2}[\cos(\omega t)+1]$.

כמו כן: $\dot{x}_2=-\frac{1}{2}V_0cos(\omega t)+\frac{1}{2}V_0=\frac{V_0}{2}[-\cos(\omega t)+1]$.

נשים לב שבכל רגע שאחד מהם נח השני במקסימום תנועות.





<u>נביט כעת בבעיה עם שתי כוכבים : (תנועה מעגלית)</u>

שני כוכבים נעים אחד סביב השני בתנועה מעגלית.

כמו בבעייה הקודמת, נשתמש במרכז המסה לפתרון. נרשום : $\vec{y}_1 = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}_1 - \frac{m_1\vec{r}_1 - m_2\vec{r}_2}{m_t} = \frac{(\vec{r}_1-\vec{r}_2)m_2}{m_t}$.

ובאופן דומה מתקיים : $\vec{y}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\vec{y}_1$. הכח שפועל בינהם הוא : $\vec{F}_G = -\frac{GMm}{(\vec{r}_1-\vec{r}_2)^2}\hat{r}$.

הע״פ החוק השני של ניוטון מתקיים : $m\ddot{\vec{y}}_1 = -\frac{GMm}{\frac{m_t{}^2}{m_2{}^2}y_1^2}\hat{r}$ וקיבלנו משוואה דיפרנציאלית : $\ddot{\vec{y}}_1 = -\frac{Gm_2^3}{m_t^2 y_1^2}\hat{r}$. ע״ הנוסחא

לתאוצה נקבל $-y_1\dot{\theta}^2\hat{r} = -\frac{Gm_2^3}{m_t^2 y_1^2}\hat{r}$. נבודד, נסדר, נציב, ונקבל : $\omega = \sqrt{\frac{Gm_2^3}{m_t^2 y_1^3}} = \sqrt{\frac{Gm_2^3}{m_t^2\frac{m_2{}^3}{m_t^3}r_{1,2}^3}} = \sqrt{\frac{Gm_t}{r_{1,2}^3}} = \sqrt{\frac{Gm_1m_2}{\mu\cdot r_{1,2}^3}}$.

מכאן ניתן לחשב את החוק השלישי של קפלר, שהוא : $\frac{T_1{}^2}{T_2{}^2} = \frac{R_1{}^3}{R_2{}^3}$.

<u>נעבור כעת לטילים, פיצוצים, וזריקות למינהן (שימוש בתנע)</u>

התרגיל הראשון יעסוק בעגלה שאדם שיושב בתוכה זורק אבן החוצה. נסמן $M_{\text{אבן}} = \Delta m, \mathrm{M}_{\text{עגלה}} = M$. את התנע שאחרי

נביע $P_{\text{אחרי}} = \left(\underbrace{\mathrm{M}-\Delta\mathrm{m}}_{\text{עגלה אחרי}}\right)\mathrm{V} - \mathrm{U}\Delta\mathrm{m} = 0$. ונקבל $V = \frac{\mathrm{U}\Delta\mathrm{m}}{\mathrm{M}-\Delta\mathrm{m}}$. כעת נחשב את המהירות לאחר זריקה נוספת של אבן

מתוך העגלה ונקבל $\Delta V = \frac{\mathrm{U}\Delta\mathrm{m}}{(\mathrm{M}-\Delta\mathrm{m})-\Delta\mathrm{m}}$. כעת נחשב את המהירות של העגלה אחרי הזריקה השניה ביחס לצופה נייח, זה

פשוט לעשות כי פשוט נוסיף את המהירות אחרי הזריקה הראשונה : $V_2 = \frac{\mathrm{U}\Delta\mathrm{m}}{\mathrm{M}-\Delta\mathrm{m}} + \frac{\mathrm{U}\Delta\mathrm{m}}{\mathrm{M}-2\Delta\mathrm{m}} = \mathrm{U}\Delta\mathrm{m}[\frac{1}{\mathrm{M}-\Delta\mathrm{m}} + \frac{1}{\mathrm{M}-2\Delta\mathrm{m}}]$.

מבחינתנו, אחרי הזריקה המהירות נשארת קבועה עבור האבן.