תרגיל 4

1. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי ו־$Y \subseteq X$ תת קבוצה. הוכיחו ש־Y הוא מרחב טופולוגי יחד עם טופולוגיית תת המרחב

$$\tau_Y := \{Y \cap O \mid O \in \tau\}$$

<u>פתרון:</u>

לפי האקסיומה הראשונה של טופולוגיה, $X, \emptyset \in \tau$ ולכן $Y = Y \cap X, \emptyset = Y \cap \emptyset \in \tau_Y$.
נראה כעת ש־τ_Y סגורה תחת חיתוך סופי. יהיו $O_1, O_2 \in \tau$, צריך להראות ש־$(Y \cap O_1) \cap (Y \cap O_2) \in \tau_Y$. לפי אסוציטיביות של חיתוכים מתקיים

$$(Y \cap O_1) \cap (Y \cap O_2) = Y \cap (O_1 \cap O_2)$$

מכיוון ש־τ טופולוגיה, מתקיים ש־$O_1 \cap O_2 \in \tau$ ולכן $Y \cap (O_1 \cap O_2) \in \tau_Y$ כרצוי. לבסוף, נניח ש־$\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \tau$ אוסף קבוצות פתוחות, צריך להראות ש־$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (Y \cap O_\lambda) \in \tau_Y$.
שוב, לפי אסוציטיביות של איחודים וחיתוחים מתקיים

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (Y \cap O_\lambda) = Y \cap \Big(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \Big)$$

מכיוון ש־τ טופולוגיה, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \tau$ ולפי הגדרה $Y \cap \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \right) \in \tau_Y$ כרצוי.

2. הוכיחו שהטופולוגיה הקו־סופית שמוגדרת ע"י $\tau_{cof} := \{\emptyset\} \cup \{O \subseteq X \mid |O^c| < \infty\}$ היא אכן טופולוגיה.

(א) מתי היא מטריזבילית?
<u>פתרון:</u>
ראשית, ברור ש־$\emptyset, X \in \tau_{cof}$. נראה כעת ש־$\tau_{cof}$ סגורה לחיתוך סופי. יהיו $O, U \in \tau_{cof}$. לפי הגדרה מתקיים ש־$|O^c|, |U^c| < \infty$. עם זאת, לפי חוקי דמורגן מתקיים

$$|(O \cap U)^c| = |O^c \cup U^c| \leq |O^c| + |U^c| < \infty$$

ולכן $O \cap U \in \tau_{cof}$ לפי הגדרה. לבסוף, נראה ש־τ_{cof} סגורה גם לאיחוד כלשהו. נניח ש־$\{O_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{I}} \subseteq \tau_{cof}$. נבחר $\lambda_0 \in \mathcal{I}$ ונשים לב שגם כאן לפי חוקי דמורגן מתקיים

$$\Big| \Big(\bigcup_{\lambda \in \mathcal{I}} O_\lambda \Big)^c \Big| = \Big| \bigcap_{\lambda \in \mathcal{I}} O_\lambda^c \Big| \leq |O_{\lambda_0}^c| < \infty$$

ולכן $\bigcup_{\lambda\in\mathcal{I}} O_\lambda \in \tau_{cof}$ כרצוי.

אנחנו נטען גם ש־(X,τ_{cof}) מטריזבילית אם ורק אם X סופי. ראשית, אם X סופי אז קל לראות ש־τ_{cof} דיסקרטית וראינו כבר שזה מטריזבילי תחת המטריקה הדיסקרטית. מנגד, נניח ש־(X,τ_{cof}) מטריזבילית. אם X מכיל פחות מ־2 אברים אז סיימנו. אחרת נבחר $x \neq y \in X$. ראינו בהרצאה שבכל מרחב מטריזבילי מתקיימת תכונת האוסדרוף, כלומר קיימות קבוצות זרות $x \in O \in \tau_{cof}, y \in U \in \tau_{cof}$ כך ש־$O \cap U = \emptyset$. עם זאת, $O \cap U \in \tau_{cof}$ ולכן

$$|(O\cap U)^c| = |\emptyset^c| = |X| < \infty$$

מש"ל.

3. הוכיחו שטופולוגיית סרפינסקי שמוגדרת ע"י $X := \{a,b\}$ ו־$\tau_{\text{Sierpiński}} := \{\emptyset, \{a\}, X\}$ היא אכן טופולוגיה.
<u>פתרון:</u> מכיוון שהקבוצה סופית, ניתן לוודא את כל האקסיומות על ידי בדיקה של כל המקרים.

4. נסתכל על X לא בת מניה ונגדיר $\tau_{\text{coc}} = \{\emptyset\} \cup \{O \mid |O^c| \leq \aleph_0\}$.
   (א) הראו שזו אכן טופולוגיה
   (ב) הוכיחו כי כל סדרה מתכנסת היא קבועה לבסוף.
   (ג) הסיקו שזה לא מרחב מטריזבילי.
   <u>פתרון:</u>

   כדי להראות שזו אכן טופולוגיה אפשר להשתמש בדיוק באותם טיעונים כמו במקרה של τ_{cof}, רק שמשתמשים גם באריתמטיקה של עוצמות.

   כעת נראה שכל סדרה מתכנסת קבועה לבסוף. נניח ש־$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ מתכנסת ל־$x \in X$. אם $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ לא קבועה לבסוף, אז אפשר למצוא תת סדרה $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ כך ש־$x_{n_k} \neq x$ לכל $k \in \mathbb{N}$. אנחנו יודעים שאם סדרה מתכנסת אז גם כל תת קבוצה שלה (וגם לאותו גבול) אז $\lim_{k\in\mathbb{N}} x_{n_k} = x$. בנוסף, $X \setminus \{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ היא סביבה פתוחה של x ולכן $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ מוכלת לבסוף ב־$X \setminus \{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. זו כמובן סתירה ולכן $\{x_n\}$ קבועה לבסוף.

   ראינו שבמרחב מטרי הסגור הסדרתי של קבוצה שווה לסגור שלה. אם הסדרות היחידות שמתכנסות קבועות לבסוף אז לכל $A \subseteq X$ מתקיים

   $$scl(A) = cl(A) = A$$

   ולכן כל קבוצה היא סגורה. מכאן שכל קבוצה היא פתוחה והטופולוגיה דיסקרטית. עם זאת, קל לראות ש־(X,τ_{coc}) אינה דיסקרטית (כי X אינה בת מניה).

5. הוכיחו שטופולגיית תת המרחב של מרחב מטרי מתלכדת עם הטופולוגיה שנגזרת מהמטריקה.
<u>פתרון:</u>
יהיה (X,d) מרחב מטרי ותהי $A \subseteq X$ תת קבוצה. עבור $a \in A$ נסמן:

$$B^X(a,r) = \{x \in X \mid d(x,r) < r\}$$

$$B^A(a,r) = \{x \in A \mid d(x,a) < r\}$$

נשים לב שלכל $a \in A$ מתקיים כי $B^A(a,r) = B^X(a,r) \cap A$. כעת, נניח ש־$O$ פתוחה ב־A לפי המטריקה. לכן, לכל $a \in O$ קיים $r_a > 0$ כך ש־$B^A(a,r_a) \subseteq O$. קל לראות ש־

$$O = \bigcup_{a \in O} B^A(a,r_a) = \bigcup_{a \in O} (A \cap B^X(a,r_a)) = A \cap \Big(\bigcup_{a \in O} B^X(a,r_a)\Big)$$

מכיוון ש־$\bigcup_{a \in O} B^X(a,r_a)$ קבוצה פתוחה ב־X (כאיחוד של קבוצות פתוחות), O הינה קבוצה פתוחה ב־A לפי טופולוגיית תת המרחב.

מנגד, נניח ש־$O \subseteq A$ פתוחה ב־A לפי טופולוגיית תת המרחב. לכן קיימת קבוצה פתוחה $O' \subseteq X$ כך ש־$O = A \cap O'$. תהי $a \in O \subseteq O'$. לפי הגדרה, קיים $r > 0$ כך ש־$B^X(a,r) \subseteq O'$. שימו לב ש־

$$B^A(a,r) = A \cap B^X(a,r) \subseteq A \cap O' = O$$

זה נכון לכל $a \in O$ ולכן O פתוחה לפי הטופולוגיה שנגזרת מצמצום המטריקה ל־A.

6. תהי $(P,<)$ קבוצה סדורה לינארית. עבור $a,b \in P$ נגדיר $(a,b) := \{x \in P \mid a < x < b\}$. נסמן גם באופן פורמלי $(a,\infty) := \{x \in P \mid a < x\}$ וגם $(-\infty,b) := \{x \in P \mid x < b\}$. נגדיר את טופולוגיית הסדר ע"י

$$\tau_< := \{O \subseteq P \mid \forall\, x \in O\ \exists\, a,b \in P \cup \{-\infty,\infty\} : x \in (a,b) \subseteq O\}$$

(א) הוכיחו שזו אכן טופולוגיה

(ב) הסבירו כיצד שונה הטופולוגיה על $[0,1) \cup \{2\}$ כתת מרחב של $\mathbb{R}$ וכמרחב עם טופולוגיית הסדר.

<u>פתרון:</u>

נשים לב ש־$(\infty,-\infty) = \emptyset$ ו־$(-\infty,\infty) = P$ ולכן האקסיומה הראשונה של טופולוגיה מתקיימת. ברור מעצם הגדרת הטופולוגיה שהיא סגורה לאיחוד כלשהו (נלמד את זה באופן יסודי יותר גם כשנדבר על בסיסים). נשאר רק להראות סגירות לחיתוך, אז יהיו $O,U \in \tau_<$ קבוצות פתוחות ותהי $x \in O \cap U$. אנחנו צריכים למצוא $a,b \in P \cup \{-\infty,\infty\}$ כך ש־$x \in (a,b) \subseteq O \cap U$. לפי הגדרה, קיימות $a_O,b_O,a_U,b_U \in P \cup \{-\infty,\infty\}$ כך ש־

$$x \in (a_O,b_O) \subseteq O,\ \ x \in (a_U,b_U) \subseteq U$$

נגדיר

$$a := \max\{a_O,a_U\},\ \ b := \min\{b_O,b_U\}$$

מצד אחד, קל לראות ש־$x \in (a,b)$. מנגד, $(a,b) \subseteq (a_O,b_O) \subseteq O$ וגם $(a,b) \subseteq (a_U,b_U) \subseteq U$ ולכן $(a,b) \subseteq O \cap U$. בזה הצלחנו להראות ש־$\tau_<$ אכן טופולוגיה לפי הגדרה.

ההבדל בין שתי הטופולוגיות על $[0,1) \cup \{2\}$ נמצא בנקודה 2. במקרה של הטופולוגיה המושרית מ־$\mathbb{R}$ היא מבודדת. מנגד, בטופולוגיית הסדר קל לראות שהסדרה $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ שואפת אליה.

7. נסתכל על הקבוצה $P := [0,1]^2$ יחד עם הסדר המילוני (לקסיקוגרפי). כלומר, אם $\overline{x}, \overline{y} \in P$ אז

$$\overline{x} < \overline{y} \iff x_1 < y_1 \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 < y_2)$$

כלומר קודם בודקים את הקואורדינטה הראשונה ואם הן שוות, בודקים את הקואורדינטה השניה.

(א) הוכיחו שהמשולש

$$T_+ := \{\overline{x} \in P \mid x_1 < x_2\}$$

הוא קבוצה פתוחה

(ב) הסיקו שהאלכסון

$$D := \{\overline{x} \in P \mid x_1 = x_2\}$$

הוא קבוצה סגורה.

(ג) הראו שהמעגל

$$C := \{\overline{x} \in P \mid (x_1 - \frac{1}{2})^2 + (x_2 - \frac{1}{2})^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^2\}$$

הוא קבוצה פתוחה.

(ד) מה היחס בין הטופולוגיה הזו של P לבין הטופולוגיה האוקלידית?

<u>פתרון:</u>

תהי $\overline{x} \in T_+$. צריך למצוא $\overline{a}, \overline{b} \in P$ כך שעבור הקטע בניהם מתקיים $\overline{x} \in (\overline{a}, \overline{b}) \subseteq T_+$. אכן, נגדיר $y := \frac{x_1+x_2}{2}$ וגם

$$\overline{a} := (x_1, x_1),\ \overline{b} := (x_1, y)$$

קל לראות שאכן $\overline{x} \in (\overline{a}, \overline{b}) \subseteq T_+$.

טיעון דומה יראה ש־$T_- := \{\overline{x} \in P \mid x_1 > x_2\}$ גם היא קבוצה פתוחה. ולכן

$$D = P \setminus (T_+ \cup T_-) = (T_+ \cup T_-)^c$$

היא קבוצה סגורה כמשלימה לאיחוד של קבוצות פתוחות.

כדי לראות ש־C קבוצה פתוחה נכתוב אותה "ברצועות". לכל $x \in [0,1]$ נגדיר

$$E_-(x) := \frac{1}{2} - \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - (x - \frac{1}{2})^2},\ E_+(x) := \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - (x - \frac{1}{2})^2}$$

כעת ניתן להציג את C כך:

$$C = \bigcup_{0 \le x_1 \le 1} ((x_1, E_-(x_1)), (x_1, E_+(x_1)))$$

שימו לב שהסוגריים החיצוניים מייצגים קטע לפי הסדר הלקסיקוגרפי על P והפנימיים מייצגים איברים (זוגות סדורים) ב־P. זה איחוד של קטעים פתוחים ולכן בהכרח פתוח.

לבסוף, נראה שהטופולוגיה הלקסיקוגרפית חזקה מהאוקלידית. טיעון דומה לאחד של הסעיף הקודם יראה שכל כדור פתוח ב־P פתוח גם לפי טופולוגיית הסדר. מנגד, נסתכל על הסדרה

$$\overline{x}^{(n)} := \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2}\right)$$

לפי הטופולוגיה האוקלידית $\lim_{n\in\mathbb{N}} \overline{x}^{(n)} = \left(0, \frac{1}{2}\right)$. מנגד, קל לראות שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\overline{x}^{(n)} \notin \left(\left(0,0\right), \left(0,1\right)\right)$$

אבל זו סביבה פתוחה של $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ולכן $\{\overline{x}^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ לא מתכנסת אליה.

8. הוכיחו ש־X הוא T_1 אמ"מ כל נקודון סגור. מה זה אומר על X סופי?

<u>פתרון:</u>

ראשית נניח ש־X הוא אכן T_1 ונראה שכל נקודון הוא סגור. בפרט, נראה שעבור כל $x \in X$ מתקיים ש־$X \setminus \{x\}$ קבוצה פתוחה. אכן, לפי הגדרת T_1, לכל $x \neq y \in X$ קיימת $y \in O_y \in \tau$ פתוחה כך ש־$x \notin O$. נגדיר

$$\widehat{O} := \bigcup_{y\in X\setminus\{x\}} O_y.$$

בבירור, $y \in O_y \subseteq \widehat{O}$ לכל $y \in X \setminus \{x\}$ ולכן $X \setminus \{x\} \subseteq \widehat{O}$. מנגד, קל לראות ש־$x \notin \widehat{O}$ ולכן $\widehat{O} \subseteq X \setminus \{x\}$. ביחד אנחנו מקבלים ש־$\widehat{O} = X \setminus \{x\}$. שימו לב ש־$\widehat{O}$ הינה קבוצה פתוחה כאיחוד של קבוצות פתוחות, מה שמוכיח ש־$\{x\}$ אכן סגורה.

מנגד, נניח שהנקודונים סגורים ונראה ש־T_1 מתקיים. יהי $x, y \in X$. אנחנו צריכים למצוא סביבה $x \in U \in \tau$ כך ש־$y \notin U$. אנחנו יודעים ש־y סגורה אז $U := X \setminus \{y\}$ פתוחה, ומקיימת את התנאי הזה.

כעת, אם X סופי אז עבור כל $x \in X$ מתקיים ש־$X \setminus \{x\} = \bigcup_{x\neq y\in X}\{y\}$ היא איחוד סופי של קבוצות סגורות ולכן היא גם קבוצה סגורה. לפי הגדרה, $\{x\}$ קבוצה פתוחה לכל $x \in X$ מה שאומר שהמרחב דיסקרטי.

9. ראינו כבר שלסדרה במרחב T_2 יש גבול יחיד. נניח ש־X מ"ט כך שכל סדרה שמתכנסת, מתכנסת לגבול יחיד. האם הוא בהכרח T_2?

<u>פתרון:</u>

לא! אפשר להסתכל על (X, τ_{coc}) עבור X לא בן מניה (כפי שהוגדרה בתרגילים הקודמים). הסדרות היחידות שמתכנסות הן הקבועות לבסוף ולכן ברור שיש גבול יחיד לכל סדרה מתכנסת. עם זאת, נוודא עכשיו שטופולוגיה זו אינה T_2. בפרט, נראה שכל שתי קבוצות פתוחות לא ריקות נחתכות. אם $O, U \in \tau_{coc}$, אז לפי הגדרה $|O^c|, |U^c| \leq \aleph_0$. לפי חוקי דמורגן מתקיים

$$|(O \cap U)^c| = |O^c \cup U^c| \leq |O^c| + |U^c| \leq \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$

מכיוון ש־X אינו בן מניה, אם המשלים של קבוצה בן מניה היא לא יכולה להיות ריקה, כרצוי.

10. הוכיחו שעבור $(P,<)$ סדורה לינארית, P היא T_2.

<u>פתרון:</u>

יהיו $a \neq b \in P$. בלי הגבלת הכלליות אפשר להניח ש־$a < b$ (מכיוון שהסדר לינארי). אם קיים $a < c < b$ אז אפשר להסתכל על הסביבות $a \in (-\infty, c)$ ו־$b \in (c, \infty)$ שהן בהכרח זרות. אם אין c כזה, אז אפשר להסתכל על הסביבות $a \in (-\infty, b)$ ו־$b \in (a, \infty)$.

11. השלימו את הטבלה הבאה לפי מיטב ידיעתכם:

מרחב טופולוגי	מטריזבילי	אולטרה־מטריזבילי	חסום	שלם	$T_?$
המרחב הדיסקרטי	כן	כן	כן	כן	T_4
הטופולוגיה הטריוויאלית אם X אינו נקודון	לא	לא	כן כמרחב פסאודומטרי	כן	$\times$
$\mathbb{R}^n$	כן	לא	לא	כן	T_4
$[0,1]$	כן	לא	כן	כן	T_4
$(\mathbb{Z}, d_p)$	כן	כן	כן	לא	T_4
$(\mathbb{Q}, d_p)$	כן	כן	לא	לא	T_4
$(\overline{\mathbb{Z}}, d_p)$ (כלומר ההשלמה)	כן	כן	כן	כן	T_4
$(\overline{\mathbb{Q}}, d_p)$ (כלומר ההשלמה)	כן	כן	לא	כן	T_4
l_1	כן	לא	לא	כן	T_4
l_2	כן	לא	לא	כן	T_4
l_∞	כן	לא	לא	כן	T_4
$(C[0,1], d_\infty)$	כן	לא	לא	כן	T_4
$(C[0,1], d_1)$	כן	לא	לא	לא	T_4
$(\{a,b\}, \tau_{\text{Sierpiński}})$	לא	לא	-	-	T_0
(X, τ_{cof}) עבור X אין סופי	לא	לא	-	-	T_1
(X, τ_{coc}) עבור X לא בן מניה	לא	לא	-	-	T_0
$([0,1]^2, <_{lex}, \tau_{<_{lex}})$	?	?	?	?	T_2