פתרון תרגיל 3 טופולוגיה תשע"ו

15 במרץ 2016

1. נראה שסדרת קושי היא סדרה מתכנסת.

(א) תהי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי במרחב.
לכן, לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0 כך שלכל $m, n > n_0$ מתקיים:

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

לכן, לכל $x_0 \in [a, b]$ מתקיים: $|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon$. אי לכך, הסדרה $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת קושי ב-$\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ מרחב שלם ולכן הסדרה מתכנסת.
נסמן את גבול הסדרה ב-$f(x_0)$.
סדרת הפונקציות $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת נקודתית ל-f. נראה שזו התכנסות בנורמה.
לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0 כך שלכל $m, n > n_0$ מתקיים:

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

וגם קיים $n_{x_0} > n_0$ עבורו $\left|f_{n_{x_0}}(x_0) - f(x_0)\right| < \varepsilon$. בפרט:

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| \le \left|f_n(x_0) - f_{n_{x_0}}(x_0)\right| + \left|f_{n_{x_0}}(x_0) - f(x_0)\right| < 2\varepsilon$$

ובפרט $\|f_n - f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| < 2\varepsilon$ לכל $n > n_0$ ולכן הסדרה אכן מתכנסת.

(ב) סדרה במרחב זה היא סדרה של סדרות, ולכן יש לנו שני אינדקסים. נסמן אחד למעלה ואחד למטה, ולא נתבלבל עם מעריך של חזקה.
תהי $\{(x_m^n)_m\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי. לכן, לכל m קבוע הסדרה $\{x_m^n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת קושי ב-$\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ מרחב שלם ולכן הסדרה מתכנסת. נסמן את גבול הסדרה ב-x_m.
נתבונן בסדרה $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$. ואז:

$$\sum |x_m|^2 = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum |x_m^n|^2 \le \sup \|\{x_m^n\}_m\|_2^2 < M < \infty$$

עבור $M > 0$ כלשהו, מכיוון שסדרת קושי היא סדרה חסומה.
מכאן, $\sum |x_m|^2 < \infty$ ולכן $\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \in l_2$.
לפי ההגדרה:

$$\left\| \{x_m^l\}_{n=1}^{\infty} - \{x_m^n\}_{n=1}^{\infty} \right\|_2 = \sqrt{\sum |x_m^l|^2 - \sum |x_m^n|^2} < \varepsilon$$

עבור n, l גדולים מספיק. נשאיף $l \longrightarrow \infty$ ונקבל:

$$\|\{x_m\}_{n=1}^{\infty} - \{x_m^n\}_{n=1}^{\infty}\|_2 = \sqrt{\sum |x_m|^2 - \sum |x_m^n|^2} \le \varepsilon$$

ולכן הסדרה $\{(x_m^n)_m\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לסדרה $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$. לכן המרחב שלם.

2. נשתמש בסדרות.

(א) תהי $\{x_n\} \subseteq A$ סדרת קושי. לכן היא גם סדרת קושי ב$-X$, ומכיוון ש$-X$ שלם, הסדרה מתכנסת ל$-X \ni x$. הקבוצה A סגורה ולכן מכילה את כל נקודות הגבול שלה, כלומר $x \in A$. לכן הסדרה מתכנסת לגבול ב$-A$ ולכן A שלם.

(ב) תהי $\{x_n\} \subseteq A$ סדרה המתכנסת ל$-X \ni x$. מכיוון שזו סדרה מתכנסת היא גם סדרת קושי, ומכיוון ש$-A$ שלם הסדרה מתכנסת ל$-A \ni y$. מיחידות הגבול במרחב מטרי נקבל ש$-A \ni x$. לכן כל נקודות הגבול של A שייכות ל$-A$ ולכן A סגורה.

3. נניח שהמרחב לא שלם. לכן, קיימת סדרת קושי לא מתכנסת, $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$. נגדיר: $F_n = \{x_m\}_{m=n}^{\infty}$, זנב הסדרה החל מהאיבר ה$-n$.

למה אלו קבוצות סגורות? אלו סדרות קושי לא מתכנסות. סדרה כזו היא קבוצה סגורה, מכיוון שאם הייתה לה נקודת הצטברות אז היא הייתה גבול חלקי של הסדרה ולכן זה היה הגבול של הסדרה עצמה והסדרה הייתה מתכנסת וסתירה! לכן אין נקודות הצטברות והקבוצה סגורה (שהרי היא מכילה את כל נקודות ההצטברות שלה).

מכיוון שהסדרה היא סדרת קושי, לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0 כך שלכל $n, m > n_0$ מתקיים $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. כלומר, כל שני איברים ב$-F_{n_0}$ קרובים אחד לשני עד כדי ε ולכן $diam(F_{n_0}) \le \varepsilon$. בפרט, $diam(F_{n_0}) \longrightarrow 0$, אך $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x_m\}_{m=n}^{\infty} = \emptyset$.

לצד השני, אם המרחב שלם, נבחר סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש$-F_n \ni x_n$. לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0 עבורו $diam(F_{n_0}) < \varepsilon$ ובפרט לכל $m, n > n_0$ מתקיים $x_n, x_m \in F_{n_0}$ ולכן:

$$d(x_n, x_m) \le diam(F_{n_0}) < \varepsilon$$

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי ולכן מתכנסת לגבול x, כי המרחב שלם. בנוסף, לכל n מתקיים: $\{x_m\}_{m=n}^{\infty} \subseteq F_n$ ולכן הגבול x שייך ל־F_n.
לכן, $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ ואם כך $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.

4. נבדוק האם הקבוצות הן פתוחות או סגורות.

(א) לא פתוחה, כי בכל כדור פתוח עם מרכז רציונלי יש נקודות אי־רציונליות.
באופן דומה, המשלים אינה פתוחה (בכל כדור פתוח עם מרכז אי־רציונלי יש נקודות רציונליות) ולכן לא סגורה.

(ב) משוואת מישור היא $ax + by + cz + d = 0$.
נתבונן בפונקציה $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י: $f(x, y, z) = ax + by + cz + d$.
זו פונקציה רציפה (פולינום) ומתקיים:

$$f^{-1}(\{0\}) = \{(x, y, z) \,|ax + by + cz + d = 0\}$$

שזהו המישור שלנו. $\{0\}$ סגורה, f רציפה ולכן גם המישור הוא סגור.
מאידך גיסא, בה"כ $a \neq 0$ (אחד מ־a, b, c בוודאי שונה מ־0) ואז עבור נקודה $x = (x_0, y_0, z_0)$ במישור ו־$\varepsilon > 0$ כלשהו, הנקודה $x' = \left(x_0 + \frac{\varepsilon}{2}, y_0, z_0\right)$ נמצאת בכדור $B(x, \varepsilon)$ אך לא במישור, לכן המישור לא מכיל את הכדור ולכן המישור לא קבוצה פתוחה.

(ג) נזכור שמטריצה היא הפיכה אם ורק אם דטרמיננטתה (למה לא) שונה מאפס.
הפונקציה $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ רציפה (היא הרי פולינום) .
לכן, מכיוון ש־$\det^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\}) = GL_n(\mathbb{R})$ ו־$\mathbb{R}\setminus\{0\} \subseteq \mathbb{R}$ פתוחה, גם $GL_n(\mathbb{R})$ פתוחה.
מצד שני, הסדרה $\left\{\frac{1}{n} \cdot I\right\} \subseteq GL_n(\mathbb{R})$ מתכנסת ל־$0 \neq GL_n(\mathbb{R})$ ולכן הקבוצה לא סגורה.

(ד) הקבוצה לא פתוחה; לכל $r > 0$, $B((0, 0), r) \subsetneq A$.
הקבוצה סגורה; כל נקודון הוא סגור ואיחוד סופי של סגורות הוא סגור.
האופציות היחידות לנקודות גבול הן $(0, 1), (0, 0)$ כי A סגורה, אך $B\left((0, 1), \frac{1}{2}\right), B\left((0, 0), \frac{1}{2}\right)$ זרים ל־A (למעט מרכזיהם) ולכן אלו לא נקודות גבול.
לכן לקבוצה אין נקודות גבול.

(ה) הקבוצה לא פתוחה; לכל $r > 0$, $B((0, 1), r) \nsubseteq B$.
הקבוצה לא סגורה, מכיוון שמשלימתה אינה פתוחה; $(1, 0) \in B^c$ אך לכל $r > 0$, $B((1, 0), r) \nsubseteq B^c$.
הקבוצה $\left\{(x, y) \,|x^2 + y^2 < 1\right\}$ היא כדור פתוח, לכן פתוחה ולכן כל הנקודות בה הן נקודות גבול.

גם נקודות הקבוצה $\left\{(x,y)\,|x^2+y^2=1\right\}$ הן נקודות גבול, כי לכל $(x,y)\in$ $\left\{(x,y)\,|x^2+y^2=1\right\}$ ולכל $r>0$ אפשר לקחת $r'=\min\{1,r\}$ ואז:

$$\left(\left(1-\frac{r'}{2}\right)x,\left(1-\frac{r'}{2}\right)y\right)\in B\cap B\left((x,y),r\right)$$

כל נקודה (x,y) אחרת אינה נקודת גבול (נסמן את מרחקה מהמעגל $\left\{(x,y)\,|x^2+y^2=1\right\}$ ב־D ואז הכדור $B\left((x,y),\frac{D}{2}\right)$ זר ל־B), ולכן קבוצת נקודות הגבול היא

$$\left\{(x,y)\,|x^2+y^2\leq 1\right\}$$

(ו) הקבוצה פתוחה; לכל $(x,y)\in C$ נסמן: $r=\frac{1}{2}\min\{|x|,|y|\}$ ואז: $B\left((x,y),r\right)\subseteq C$, כי אם $(a,b)\in B\left((x,y),r\right)$ אז:

$$|a-x|<\sqrt{|x-a|^2+|y-b|^2}<r\leq\frac{1}{2}|x|$$

ולכן:

$$a>|x|-\frac{1}{2}|x|>0$$

באופן דומה, $|b-y|<\frac{1}{2}|y|$ ולכן:

$$b<y+\left|\frac{1}{2}y\right|=-|y|+\frac{1}{2}|y|<0$$

וסה"כ: $(a,b)\in C$.

הקבוצה לא סגורה, כי משלימתה אינה פתוחה; $(0,0)\in C^c$ אך לכל $r>0$, $B\left((0,0),r\right)\nsubseteq C$.

הקבוצה פתוחה, ולכן כל $(x,y)\in C$ היא נקודת גבול.

יתר על כן, גם הנקודות: $\{(x,y)\,|x=0,y\leq 0\}\cup\{(x,y)\,|y=0,x\geq 0\}$ הן נקודות גבול, כי לכל (x,y)כזו ולכל $r>0$,

$$\left(x+\frac{r}{2},y-\frac{r}{2}\right)\in B\left((x,y),r\right)\cap C$$

נקודות אחרות אינן נקודות גבול (קל לראות) ולכן בסה"כ נקודות הגבול הן $\{(x,y)\,|x\geq 0,y\geq 0\}$.

(ז) הקבוצה אינה פתוחה, מכיוון שעבור $\left(\frac{1}{2},0\right)\in A$, לכל $r>0$ מתקיים:

$$B\left(\left(\frac{1}{2},0\right),r\right)\nsubseteq A$$

הקבוצה אינה סגורה, כי המשלים אינו קבוצה פתוחה; לכל $r>0$, מתקיים $B\left((1,0),r\right)\nsubseteq A^c$.

(ח) הקבוצה אינה פתוחה, כי עבור $(1,1) \in B$, לכל $r > 0$ מתקיים

$$B\left(\left(1,1\right),r\right) \subsetneq B$$

הקבוצה סגורה, מכיוון שהמשלים פתוחה; לכל נקודה $(x,y) \in B^c$ נסמן את מרחקה מהישר $y = x$ ב־D ואז $B\left(\left(x,y\right),\frac{D}{2}\right) \subseteq B^c$.

(ט) הקבוצה פתוחה; לכל $(x,y) \in C$ נסמן את מרחקה מהישר $x + y + 1 = 0$ ב־D, ונסמן: $r = \frac{1}{2}\min\left\{\left|x\right|,\left|y\right|,D\right\}$ ונקבל ש: $B\left(\left(x,y\right),r\right) \subseteq C$.
הקבוצה לא סגורה, כי המשלים אינה פתוחה; עבור $(0,0) \in C^c$, לכל $r > 0$ $B\left(\left(0,0\right),r\right) \subsetneq C^c$ ולכן אינה פתוחה.

5. נשתמש בהגדרת רציפות באמצעות קבוצות פתוחות.

(א) הפרכה. ניקח $X = Y = \mathbb{R}$, את המטריקה d_1 להיות המטריקה הדיסקרטית ואת שאר המטריקות d_2, ρ_1, ρ_2 להיות המטריקה הסטנדרטית.
נקבל שכל פונקציה $f : (X, d_1) \to (Y, \rho_1)$ היא רציפה כי כל קבוצה ב־(X, d_1) היא פתוחה (זו המטריקה הדיסקרטית), אך בוודאי שניתן למצוא פונקציה $f : (X, d_2) \to (Y, \rho_2)$ שאינה רציפה, למשל:

$$f\left(x\right) = \begin{cases} x & x > 1 \\ -7 & x \leq 1 \end{cases}$$

(ב) הוכחה. אם f רציפה אז $f^{-1}\left(O\right)$ פתוחה ב־X לכל O פתוחה ב־Y. כל כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה ולכן לכל כדור פתוח O, $f^{-1}\left(O\right)$ פתוחה.
לצד השני, לכל כדור פתוח $O \subseteq Y$, $f^{-1}\left(O\right)$ פתוחה ב־X. תהי $U \subseteq Y$ פתוחה. לכל $x \in U$ קיים $r_x > 0$ עבורו $B\left(x, r_x\right) \subseteq U$.
לכן: $U = \bigcup_{x \in U} B\left(x, r_x\right)$, ולכן:

$$f^{-1}\left(U\right) = f^{-1}\left(\bigcup_{x \in U} B\left(x, r_x\right)\right) = \bigcup_{x \in U} f^{-1}\left(B\left(x, r_x\right)\right)$$

וזהו איחוד של קבוצות פתוחות ולכן קבוצה פתוחה. תמונה הפוכה של פתוחה היא פתוחה ולכן הפונקציה רציפה.
*הראו שתמונה הפוכה של איחוד אכן שווה לאיחוד התמונות ההפוכות.

(ג) הפרכה. ניקח $X = Y = \mathbb{R}$, d המטריקה הסטנדרטית ו־ρ המטריקה הדיסקרטית.
תהי $f = Id$ פונקציית הזהות. הפונקציה אינה רציפה, שכן $\{5\}$ פתוחה ב־(Y, ρ) אך $f^{-1}\left(\{5\}\right) = \{5\}$ לא פתוחה במטריקה הסטנדרטית.
מצד שני, במטריקה הדיסקרטית כדור סגור ברדיוס 1 הוא המרחב כולו וכדור

סגור עם רדיוס קטן מ-1 הוא נקודון מהצורה $\{x\}$.
כעת, גם עבור המרחב כולו: $f^{-1}(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ וגם עבור נקודון $f^{-1}(\{x\})=\{x\}$ נקבל שהקבוצה אכן סגורה ב$-(X,d)$, אך כמו שהסברנו הפונקציה אינה רציפה.

6. נראה בסעיף הראשון שרציפות מתקיימת ונשתמש בכך בסעיף השני.

(א) תהי $\{f_n\}\subseteq C[0,1]$ סדרת פונקציות המתכנסת ל$-$ $f\in C[0,1]$.
נראה ש$-$ $F_a(f_n)\longrightarrow F_a(f)$ ונסיק מכך ש$-F_a$ אכן רציפה.
$F_a(f_n)\longrightarrow F_a(f)$ פירושו $f_n(a)\longrightarrow f(a)$ לפי הגדרת F_a. מתקיים:

$$0\leq|f_n(a)-f(a)|\leq\max_{x\in[0,1]}\{f_n(x)-f(x)\}=d(f_n,f)$$

ומכיוון ש$-f$ $f_n\longrightarrow$, $d(f_n,f)\longrightarrow 0$ ולכן לפי סנדוויץ', $f_n(a)\longrightarrow f(a)$ ולכן F_a רציפה.

(ב) שימו לב שקצת קשה לתפוס אינטואיטיבית איך אמורה להיראות קבוצה פתוחה של פונקציות, אבל בעזרת הרציפות החיים קלים:

$$\left\{f\in C[0,1]:f\left(\frac{1}{3}\right)<19\right\}=\left\{f\in C[0,1]:F_{\frac{1}{3}}(f)<19\right\}=F_{\frac{1}{3}}^{-1}((-\infty,19))$$

ומכיוון ש$-$ $(-\infty,19)$ פתוחה ב$-\mathbb{R}$ ו$-F_{\frac{1}{3}}$ רציפה, גם הקבוצה שלנו פתוחה.

7. נראה שבנקודות שנמצאות על הצירים הפונקציה אינה רציפה.
נניח בשלילה שהפונקציה רציפה בנקודה מהצורה $(x,0)$. לכן, לכל סדרה $(x_n,y_n)\longrightarrow(x,0)$ מתקיים:

$$f(x_n,y_n)\longrightarrow f(x,0)$$

אלא שעבור הסדרה $\left(x,\frac{1}{n}\right)$, שאכן שואפת לנקודה $(x,0)$, מתקיים:

$$f\left(x,\frac{1}{n}\right)=\sqrt{2}$$

בעוד ש: $f(x,0)=8$ ולכן בוודאי $f\left(x,\frac{1}{n}\right)$ לא שואפת ל$-$ $f(x,0)$.
לכן הפונקציה לא רציפה בנקודות מהצורה $(x,0)$. ההוכחה לכך שהפונקציה לא רציפה בנקודות מהצורה $(0,y)$דומה.
במקרה של ראשית הצירים אפשר להתבונן בסדרה $\left(\frac{1}{n^{10}},\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
מצד שני, בנקודות שלא נמצאות על הצירים הפונקציה כן רציפה; נראה זאת בעזרת סביבות.
תהי $a=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ שלא נמצאת על אף ציר. יהי $B(f(a),\varepsilon)$ כדור פתוח סביב

.$f(a)$

אם נבחר $\delta = \min\{|x|,|y|\}$ נקבל שאכן: $f(B(a,\delta)) \subseteq B(f(a),\varepsilon)$. לכן הפונקציה רציפה ב־$a$.

לכן, קבוצת נקודות הרציפות של f היא הקבוצה:

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \neq 0 \wedge y \neq 0\right\}$$

הקבוצה A פתוחה; לכל $(x,y) \in A$ הכדור $B((x,y),r) \subseteq A$ עבור $r = \min\{|x|,|y|\}$.

הקבוצה לא סגורה, כי הסדרה $\left(\frac{1}{n^{10}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ מוכלת ב־A, אך הגבול שלה $(0,0)$ לא שייך ל־A.

8. נתבונן בפונקציה:

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 2-4x & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

לכל $0 < \varepsilon < 2$. הפונקציה כמובן רציפה ולכן $f \in C[0,1]$. כמו כן, $\max_{x\in[0,1]} |f(x)| = 2$ וגם: $\int_0^1 |f_\varepsilon(x)|\,dx < \varepsilon$.

הקבוצה $B_{d_{\max}}(0,1)$ פתוחה במרחב $(C[0,1], d_{\max})$ מכיוון שהיא כדור פתוח.

נראה שהקבוצה לא פתוחה במרחב $(C[0,1], d_1)$.

נניח בשלילה שהקבוצה כן פתוחה במרחב $(C[0,1], d_1)$. $0 \in B_{d_{\max}}(0,1)$ ולכן קיים $0 < \varepsilon < 2$ עבורו:

$$B_{d_1}(0,\varepsilon) \subseteq B_{d_{\max}}(0,1)$$

לפי הגדרת קבוצה פתוחה. מכיוון ש: $d_1(f_\varepsilon, 0) = \int_0^1 |f_\varepsilon(x)|\,dx < \varepsilon$, נקבל ש: $f_\varepsilon \in B_{d_1}(0,\varepsilon)$.

לכן גם $f_\varepsilon \in B_{d_{\max}}(0,1)$, אך $d_{\max}(f_\varepsilon, 0) = \max_{x\in[0,1]} |f(x)| = 2 > 1$ ולכן $f_\varepsilon \neq B_{d_{\max}}(0,1)$ וסתירה!

לכן הקבוצה $B_{d_{\max}}(0,1)$ לא פתוחה במרחב $(C[0,1], d_1)$.