89-132 – פתרון בוחן תשע"ח

<u>שאלה 1 (33 נק')</u>

א. (8 נק') תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. הגדירו את ***<u>הנגזרת</u>*** של הפונקציה f בנקודה $x_0\in\mathbb{R}$.

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ו- $x_0\in\mathbb{R}$. נאמר כי הפונקציה f גזירה בנקודה x_0 וכי הנגזרת שלה היא $L\in\mathbb{R}$ אם לכל $0\neq\Delta x\approx 0$ מתקיים: $st\left(\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right)=L$.

ב. (25 נק') גיזרו את הפונקציה $f(x)=\sqrt{x^3-2x^2-3}$ ***<u>לפי הגדרה</u>***.

יהי $0\neq\Delta x\approx 0$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\sqrt{(x+\Delta x)^3-2(x+\Delta x)^2-3}-\sqrt{x^3-2x^2-3}}{\Delta x}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{(x+\Delta x)^3-2(x+\Delta x)^2-3}-\sqrt{x^3-2x^2-3}\right)\left(\sqrt{(x+\Delta x)^3-2(x+\Delta x)^2-3}+\sqrt{x^3-2x^2-3}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{(x+\Delta x)^3-2(x+\Delta x)^2-3}+\sqrt{x^3-2x^2-3}\right)}=$$

$$=\frac{(x+\Delta x)^3-2(x+\Delta x)^2-3-x^3+2x^2+3}{\Delta x\left(\sqrt{(x+\Delta x)^3-2(x+\Delta x)^2-3}+\sqrt{x^3-2x^2-3}\right)}=$$

$$=\frac{x^3+3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+\Delta x^3-2x^2-4x\Delta x-2\Delta x^2-3-x^3+2x^2+3}{\Delta x\left(\sqrt{(x+\Delta x)^3-2(x+\Delta x)^2-3}+\sqrt{x^3-2x^2-3}\right)}=$$

$$=\frac{3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+\Delta x^3-4x\Delta x-2\Delta x^2}{\Delta x\left(\sqrt{(x+\Delta x)^3-2(x+\Delta x)^2-3}+\sqrt{x^3-2x^2-3}\right)}=$$

$$=\frac{3x^2+3x\Delta x+\Delta x^2-4x-2\Delta x}{\sqrt{(x+\Delta x)^3-2(x+\Delta x)^2-3}+\sqrt{x^3-2x^2-3}}$$

כעת ניתן לקחת חלק סטנדרטי: המכנה איננו אינפיניטסימלי לכן נוכל להשתמש בחוקי החלק הסטנדרטי.

$$st\left(\frac{3x^2+3x\Delta x+\Delta x^2-4x-2\Delta x}{\sqrt{(x+\Delta x)^3-2(x+\Delta x)^2-3}+\sqrt{x^3-2x^2-3}}\right)=\frac{3x^2+0+0-4x-0}{\sqrt{(x+0)^3-2(x+0)^2-3}+\sqrt{x^2-2x^2-3}}=\frac{3x^2-4x}{2\sqrt{x^3-2x^2-3}}$$

לסיכום,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-4x}{2\sqrt{x^3-2x^2-3}}$$

<u>שאלה 2 (34 נק')</u>

א. (9 נק') השתמשו במשפט הפונקציה ההפכית כדי למצוא את $\frac{dx}{dy}$ עבור $y=x^7-2x+1$. (הניחו כי הפונקציה הפיכה. בטאו באמצעות x.).

לפי כללי גזירה, $\frac{dy}{dx}=7x^6-2$. לכן לפי משפט הפונקציה ההפכית: $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{7x^6-2}$.

ב. (25 נק') מיצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=\sin(x^{\cos x})$ בנקודה $x=2\pi$.

נגזור ראשית את הפונקציה הפנימית לשם נוחות. נסמן: $g(x)=x^{\cos x}$. אזי:

$$g(x)=x^{\cos x}=e^{\ln(x^{\cos x})}=e^{\cos x\ln x}$$

לכן:

$$g'(x)=(e^{\cos x\ln x})'=e^{\cos x\ln x}(-\sin x\ln x+\frac{\cos x}{x})$$

כעת לאחר שהכנו חישוב זה, נחזור לגזור את $f(x)$:

$$f'(x)=(\sin(x^{\cos x}))'=\cos(x^{\cos x})(x^{\cos x})'=\cos(x^{\cos x})e^{\cos x\ln x}(-\sin x\ln x+\frac{\cos x}{x})$$

לכן שיפוע המשיק בנקודה $x=2\pi$ הוא:

$$f'(2\pi)=\cos((2\pi)^{\cos(2\pi)})e^{\cos(2\pi)\ln(2\pi)}(-\sin(2\pi)\ln(2\pi)+\frac{\cos(2\pi)}{2\pi})=\frac{2\pi}{2\pi}=1$$

קיבלנו שיפוע $m=1$, כמו כן הנקודה בה אנחנו מעבירים את המשיק היא $(x_{0,}y_0)=(2\pi,0)$ (קיבלנו את ערך ה- y ע"י הצבת 2π בפונקציה המקורית $f(x)$). לכן משוואת המשיק היא:

$$y-0=1(x-2\pi)$$

כלומר:

$$y=x-2\pi$$

<u>שאלה 3 (33 נק')</u>

א. (8 נק') הגדירו את המושגים הבאים:

i. מספר אינסופי חיובי

נאמר כי $H\in\mathbb{R}^*$ הוא <u>מספר אינסופי חיובי</u> אם לכל מספר ממשי r מתקיים: $H>r$.

ii. מספר אינפיניטסימלי שלילי

נאמר כי $\epsilon\in\mathbb{R}^*$ הוא <u>מספר אינפיניטסימלי שלילי</u> אם לכל מספר ממשי שלילי r מתקיים: $r<\epsilon<0$.

ב. (12 נק') הוכיחו כי מספר אינסופי חיובי גדול מכל מספר סופי.
בסעיף זה השתמשו בהגדרות בלבד, כלומר: אסור להשתמש בשום טענה שראיתם בהרצאה או בתרגול – יש לנמק הכל היטב ישירות מן ההגדרות.

יהי H מספר אינסופי חיובי, a מספר סופי. יש להראות כי $H>a$.
כיוון ש- a סופי קיימים שני מספרים ממשיים $r_{1,}r_2$ כך ש- $r_1<a<r_2$.
כיוון ש- H אינסופי חיובי הוא גדול מכל מספר ממשי, בפרט $H>r_2$.
כלומר, $H>r_2$ וכן $r_2>a$, לכן $H>a$. מש"ל.

ג. (13 נק') יהיו a,b,a',b' מספרים היפרממשיים, כך ש- $a\approx a'$ וכן $b\approx b'$. הוכיחו או הפריכו:
$st(\frac{a}{b})=st(\frac{a'}{b'})$ (בהנחה שהחלקים הסטנדרטיים מוגדרים).

הטענה לא נכונה. נפריך אותה ע"י הבאת דוגמה נגדית:

$$a=b=b'=\epsilon$$
$$a'=2\epsilon$$

באשר ϵ מספר אינפיניטסימלי כלשהו שאיננו 0.

אכן מתקיים $a \approx a'$ כי $a-a'=-\epsilon$ אינפי', וכן $b \approx b'$ כי $b-b'=0$ אינפי'.

כמו כן:

$$st\left(\frac{a}{b}\right)=st\left(\frac{\epsilon}{\epsilon}\right)=st(1)=1$$
$$st\left(\frac{a'}{b'}\right)=st\left(\frac{2\epsilon}{\epsilon}\right)=st(2)=2$$