

# דף תרגילים 11

201 – 88 תשע"ח סמסטר ב'

**תרגיל 1** נתון המשטח הבא (משטח *Enneper*):

$$x(u, v) = \left( u - \frac{1}{3}u^3 + uv^2, -v + \frac{1}{3}v^3 - vu^2, u^2 - v^2 \right)$$

הראו כי הוא משטח מינימלי.

**פתרון 1**

$$x_1 = (1 - u^2 + v^2, -2uv, 2u)$$

$$x_2 = (2uv, -1 + v^2 - u^2, -2v)$$

כלומר

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} (1 - u^2 + v^2)^2 + 4u^2v^2 + 4u^2 & 0 \\ 0 & (-1 + v^2 - u^2)^2 + 4u^2v^2 + 4v^2 \end{pmatrix} = \lambda(u, v)(\delta_{ij})$$

באשר

$$\lambda(u, v) = (1 - u^2 + v^2)^2 + 4u^2v^2 + 4u^2$$

כלומר הקואורדינטות איזותרמיות. לכן יש להראות כי  $x_{11} + x_{22} = 0$ .

$$\begin{cases} x_{11} = (-2u, -2v, 2) \\ x_{22} = (2u, 2v, -2) \end{cases}$$

מש"ל.

**תרגיל 2** הוכיחו כי אם משטח הוא משטח מינימלי, אז עקמומיות גאוס היא אי-חיובית בכל נקודה.

**פתרון 2** אם משטח הוא מינימלי אז  $H = 0$  בכל נקודה כלומר  $k_1 = -k_2$  בכל נקודה. לכן עקמומיות גאוס היא  $K = k_1k_2 = -(k_1)^2 \leq 0$ .

**תרגיל 3** הראו כי משטח *Scherk* הנתון ע"י

$$x(x, y) = \left( x, y, \ln \left( \frac{\cos y}{\cos x} \right) \right)$$

הוא משטח מינימלי.

**פתרון 3** תרגיל זה הופיע כמשפט 10.2.5 בהרצאה.

**תרגיל 4** נתון משטח בעל מטריקה

$$(g_{ij}(x, y)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$$

הראו כי יש לו עקמומיות גאוס קבועה  $K \equiv -1$ .

**פתרון 4** גורם קונפורמי  $\lambda(x, y) = y^{-2}$  נגזרותיו  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2y^{-3}$  לכן

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{\lambda_1}{2\lambda} = 0 \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{-\lambda_1}{2\lambda} = 0 \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{\lambda_2}{2\lambda} = \frac{-2y^{-3}}{2y^{-2}} = \frac{-1}{y} \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{-\lambda_2}{2\lambda} = \frac{1}{y} \\ \Gamma_{22}^2 &= \frac{\lambda_2}{2\lambda} = \frac{-1}{y} \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{\lambda_1}{2\lambda} = 0 \end{aligned}$$

כעת,

$$\begin{aligned} K &= \frac{2}{g_{11}} \left( \Gamma_{1[1,2]}^2 + \Gamma_{1[1]}^j \Gamma_{2]j}^2 \right) \\ &= \frac{2}{g_{11}} \left( \Gamma_{1[1,2]}^2 + \Gamma_{1[1]}^1 \Gamma_{2]1}^2 + \Gamma_{1[1]}^2 \Gamma_{2]2}^2 \right) \\ &= \frac{1}{g_{11}} \left( \Gamma_{11,2}^2 - \Gamma_{12,1}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 \right) \\ &= y^2 \left( \frac{-1}{y^2} - 0 + 0 - \left( \frac{1}{y} \right) \left( \frac{-1}{y} \right) + \left( \frac{1}{y} \right) \left( \frac{-1}{y} \right) - 0 \right) \\ &= -1 \end{aligned}$$