תרגיל 3:

1) הוכיחו שהמרחבים הבאים שלמים: $C[a,b]$
א. $C[a,b]$ עם הנורמה $\|f\| = \sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$.
ב. $l_2 = \{(x^n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} | \sum_{n=1}^{\infty}(x^n)^2 < \infty\}$
עם הנורמה $\|(x^n)_{n=1}^{\infty}\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)^2}$.

2) האם הגבולות הבאים קיימים? אם כן, חשבו אותם.
א.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x}$$

ב.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+3y^2}}$$

ג.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2}$$

3)
א. הוכיחו שאם לסדרת קושי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ יש גבול חלקי = גבול של תת סדרה $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, אז זהו הגבול של כל הסדרה.
ב. הסיקו שמרחב מטרי קומפקטי הוא שלם.

4) יהי (X,d) מרחב מטרי, נגדיר את הקוטר של תת קבוצה $A \subseteq X$ להיות $\delta(A) = \sup\{d(x,y) | x,y \in A\}$.
הוכיחו שמרחב מטרי הוא שלם אם ורק אם לכל סדרת קבוצות סגורות יורדת $F_{n+1} \subseteq F_n \subseteq X$ המקיימת $\delta(F_n) \to 0$ מתקיים ש- $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.