הגד' $E := \{ A \in [\mathbb{A}] \mid A$ מקיים את התכונה הרצויה $\}$

טענה: E מהווה σ אלגברה. מעל X

הוכחה: נבדוק לפי הגד' σ אלגברה:

א) ניקח משפחה בת"מ כלשהי תלויה ב $\mathbb{A}$, $\mathbb{D} = \{D_i\}_{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{A}$

ומצאנו ש $X \in [\mathbb{D}]$

לכן $X \in E$

ב) נניח $A \in E$ (צ"ל $A^c \in E$)

$\Leftarrow$ קיימת משפחה בת"מ $\mathbb{D} = \{D_i\}_{\mathbb{N}}$ של קבוצות ששייכות ל $\mathbb{A}$.

כך ש $A \in [\mathbb{D}]$

$[\mathbb{D}]$ σ אלגברה $\Leftarrow A^c \in [\mathbb{D}] \Leftarrow A^c \in E$

ג) $\{A_n\}_{\mathbb{N}} \subseteq E$ (צ"ל $\bigcup_{\mathbb{N}} A_n \in E$)

לכל i: A_i מקיים את התכונה

לכן קיים $\mathbb{D}_i$ בת"מ כך ש- $A_i \in [\mathbb{D}_i]$

ניקח: $\mathbb{D} := \bigcup_{\mathbb{N}} \mathbb{D}_i$ אזי $\mathbb{D}$ בת"מ כאיחוד מני של בת"מ

ולכל i $\mathbb{D}_i \subseteq \mathbb{D} \Leftarrow A_i \in [\mathbb{D}_i] \subseteq [\mathbb{D}]$

לכן לכל i $A_i \in [\mathbb{D}] \Leftarrow$ ($[\mathbb{D}]$ σ אלג'.) $\bigcup_{\mathbb{N}} A_i \in [\mathbb{D}]$

מש"ל טענה.

כעת נשים לב: אם $A \in \mathbb{A}$ אזי $\{A\}$ סופית (ובפרט בת מנייה)

וגם $A \in [\{A\}]$

לכן $A \in E \Leftarrow \mathbb{A} \subseteq E$

$\Leftarrow [\mathbb{A}] \subseteq [E] = E$

והראנו שכל קבוצה ב $[\mathbb{A}]$ מקיימת את התכונה. מש"ל.