הרצאה 22

5 בינואר 2014

$\Omega\subset P$
$\chi\in\mathscr{R}(P)$
$\underline{S}(\chi_\Omega,P)=0,\overline{S}(\chi_\Omega,P)=1$ כי χ_Ω דיריכלה לא דיפ' $n=1:\Omega=\{r\in\mathbb{Q}:r\in[0,1]\}$

אינטגרל על קבוצה

הגדרה:

$A\subset P;A\in\mathscr{R}(P)$
$\int_A f(x):=\int_P\chi_A(x)f(x)\,dx$

תכונות

אדטיביות:

1. A,B
$A\cap B=\phi$
$\chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B$
$(\chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B-\chi_{A\cap B})$
2. $A,B\subset P$

$$A\cap B=\phi\Rightarrow\int_{A\cup B}f(x)\,dx=\int_A f(x)\,dx+\int_B f(x)\,dx$$

3. חיוביות:
$f\geq 0\Rightarrow\int_P f(x)\,dx\geq 0$
$f,g\in\mathscr{R}(P):f(x)\geq g(x)\Rightarrow\overline{S}(f,\mathscr{P})\geq\overline{S}(g,\mathscr{P})\Rightarrow\int_p f(x)\,dx\geq\int_P g(x)\,dx$

מסקנה

1. $m\leq f(x)\leq M$ כאשר

$$M=\sup_{x\in P}f(x),m=\inf_{x\in P}f(x)$$

$$mV(P)=\int_P mdx\leq\int_P f(x)\,dx\leq\int_P Mdx=MV(P)$$

2.

$$-|f(x)|\leq f(x)\leq|f(x)|\Rightarrow-\int_P|f(x)|\,dx\leq\int_P f(x)\,dx\leq\int_P|f(x)|$$

אי שוויון המשולש

$\boxed{\left|\int_P f(x)\,dx\right| \le \int_P |f(x)|}$

$\left|\int_A f(x)\,dx\right| \le \sup_{x\in A}|f(x)|\int_A dx = \sup_{x\in A}|f(x)|\,V(A)$

$\boxed{\int_P(-f(x))\,dx = -\int_P f(x)\,dx}$

הוכחה

$$\sup_{x\in B}(-f,(x)) = -\inf_{x\in B} f(x)$$

$\mathscr{P}$חלוקה של P:

$\overline{S}(-f,\mathscr{P}) = -\underline{S}(f,\mathscr{P})$

$$\inf_{\mathscr{P}}\overline{S}(-f,\mathscr{P}) = \sup_{\mathscr{P}}\underline{S}(-f,\mathscr{P}) = -\sup_{\mathscr{P}}\underline{S}(f,\mathscr{P}) = -\inf_{\mathscr{P}}\overline{S}(f,\mathscr{P}) = -\int_{\mathscr{P}} f(x)\,dx$$

$\Rightarrow \int_P(-f(x)\,dx) = -\int_P f(x)\,dx$

$\boxed{\int_P \alpha f(x)\,dx = \alpha\int_P f(x)\,dx}$

הוכחה

$\alpha = \begin{cases} |\alpha| & \alpha\ge 0 \\ -|\alpha| & \alpha\le 0\end{cases}$ ולכן מספיק לקחת $\alpha\ge 0$.

$\sup_x \alpha f(x) = \alpha\sup_x f(x)$

$\inf_x \alpha f(x) = \alpha\inf_x f(x)$

$\Downarrow$

$\overline{S}(\alpha f,P) = \alpha\overline{S}(f,P)$

$\underline{S}(\alpha f,P) = \alpha\underline{S}(f,P)$

$\int_P \alpha f(x)\,dx = \int \inf_P \overline{S}(\alpha f,P) = \alpha\inf_P\overline{S}(f,P) = \alpha I(f)$

$\boxed{\int_P(f+g)\,dx = \int_P f dx + \int_P g dx}$

הוכחה

$\mathscr{P},\mathscr{Q}$ חלוקות של P.

$$\overline{S}\left(f+g,P\mathring{\cap}Q\right) = \sum_{i,j}\sup_{x\in P_i\mathring{\cap}Q_j}\left(f(x)+g(x)V\left(P_i\mathring{\cap}Q_j\right)\right) = \sum_{i,j}\sup_{x\in P_i\mathring{\cap}Q_j} f(x)V\left(P_i\mathring{\cap}Q_j\right) + \sum_{i,j}\sup_{x\in P_i\mathring{\cap}Q_j} g(x)V\left(P_i\mathring{\cap}Q_j\right)$$

$\le \overline{S}\left(f,P\mathring{\cap}Q\right) + \overline{S}\left(g,P\mathring{\cap}Q\right) \le \overline{S}(f,P)+\overline{S}(g,Q)$

קיבלנו $\overline{S}\left(f+g,P\mathring{\cap}Q\right) \le \overline{S}(f,P)+\overline{S}(g,Q)$

וגם $\underline{S}(f,P)+\underline{S}(g,Q) \le \underline{S}\left(f+g,P\mathring{\cap}Q\right) \le \overline{S}\left(f+g,P\mathring{\cap}Q\right) \le \overline{S}(f,P)+\overline{S}(g,Q)$

$\overline{I}(f+g) \le \overline{S}\left(f+g,P\mathring{\cap}Q\right) \le \overline{S}(f,P)+\overline{S}(g,Q)$

$\underline{S}(f,P)+\underline{S}(g,Q) \le \underline{S}\left(f+g,P\mathring{\cap}Q\right) \le \underline{I}(f+g)$

קיבלנו:

$\underline{S}(f,P)+\underline{S}(g,Q) \le \underline{I}(f+g) \le \overline{I}(f+g) \le \overline{S}(f,P)+\overline{S}(g,Q)$

$\Downarrow$

$\sup_P\underline{S}(f,P)+\sup_Q\underline{S}(g,Q) \le \underline{I}(f+g) \le \overline{I}(f+g) \le \inf_P\overline{S}(f,P)+\inf_Q\overline{S}(g,Q)$

$I(f)+I(g) \le \underline{I}(f+g) \le \overline{I}(f+g) \le I(f)+I(g)$

ולכן $I(f)+I(g) = I(f+g)$

הערה

אם $N \subseteq P$ קבוצה קומפקטית, $mesN = 0$ ו-$f(x) = g(x) \forall x \in P \backslash N$ אז:
$f \in \mathscr{F}(P) \Leftrightarrow g \in \mathscr{F}(P)$ ו-$I(f) = I(g)$.

מחלקה $E(P)$

הגדרה

$f \in E(P)$ אם:
$\exists A_1, ..., A_k \subset P$ כך ש:

1. A_j קומפקטית
2. $A_J \subset M_j$ עבור M_j משטח דפ' מ-$C^r, r \geq 1$
3. $f \in C\left(P \backslash \left(\bigcup_{j=1}^{k} A_j\right)\right)$

משפט

אם $f : P \to \mathbb{R}$ חסומה ו-$f \in E(P)$ אז $f \in \mathscr{R}(P)$.

מספיק להראות כי

אם $A \subset M \subset P$ עבור M-C^r-משטח, $r \geq 1$ אז $mesA = 0$.

למה

K-קטע n מימדי ו-$\varphi : K \to \mathbb{R}$ C^1-פונקציה, $\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x)\right| \leq C$, $x \in K, 1 \leq j \leq n :$
אז φ רציפה במידה שווה ב-K

הוכחה

$\forall x, y \in K : \varphi(x) - \varphi(y) = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x + \theta(y - x))(x_j - y_j)_{0<\theta<1}$
ולכן
$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x + \theta(y - x))\right| |x_j - y_j| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x + \theta(y - x))\right| \leq$
$\leq C_n \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_j| = C_n ||x_i - y_i||$
נקבע $\varepsilon > 0$, $\delta := \frac{\varepsilon}{C_n}$ ואז:
$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \varepsilon$

למה

אם $A \subset M \subset P$, M-C^r-משטח, $r \geq 1$ אז $mesA = 0$
(A קבוצה קומפקטית)

הוכחה

גרף$\forall x \in M \exists U_x \ni x : U_x \cap M = \Gamma_\varphi$
כיסוי פתוח $M \subseteq \bigcup_{x \in M} U_x$
A קומפקטית ולכן קיים כיסוי סופי $M \subseteq \bigcup_{s=1}^{N} U_s$
$A = \bigcup_{s=1}^{N} (U_s \cap A)$
$mes(U_s \cap A) = 0?$
בה"כ נניח $x_n = \varphi(x_1, .., x_{n-1})$
$\Gamma_\varphi = \{x : x_n = \varphi(x_1, .., x_{n-1}), x_1, .., x_{n-1} \in K\}$ K קטע $n - 1$ מימדי.
$\varphi \in C^1(K) \Leftarrow$ $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$ רציפות ב-K ולפי הלמה φ רציפה במ"ש ב-K ולכל $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x', x'' \in K ||x' - x''||_\infty < \delta \Rightarrow$
$|\varphi(x') - \varphi(x'')| < \varepsilon$
ניקח חלוקה של K : $K = \bigcup_{i=1}^{s} P'_i$ כל ש $\forall x', x'' \in P'_i : ||x' - x''||_\infty < \delta$
נבחר $\xi_i \in P'_i$
נגדיר $P_i = P' \times \left[\varphi(\xi_i) - \frac{\varepsilon}{2}, \varphi(\xi_i) + \frac{\varepsilon}{2}\right]$

$x' \in K, x_1 = \varphi(x')$
$K = \bigcup P_i' \Rightarrow \exists x' \in P_i'$
לפי בחירה
$|\varphi(x') - \varphi(\xi_i)| < \varepsilon$
$x_n \in \left[\varphi(\xi_i) - \frac{\varepsilon}{2}, \varphi(\xi_i) + \frac{\varepsilon}{2}\right]$
קיבלנו $\forall x \in \Gamma_\varphi \exists i : P_i' \times \left[\varphi(\xi_i) - \frac{\varepsilon}{2}, \varphi(\xi_i) + \frac{\varepsilon}{2}\right] = P_i$
$\Gamma_\varphi \subseteq \bigcup_{i=1}^{s} P_i$ - כיסוי!
$\sum_{i=1}^{s} v(P_i) = \sum_{i=1}^{s} v(P_i')\,\varepsilon = v(K)\,\varepsilon$ ולכן $mes(\Gamma_\varphi) = 0$

מסקנה

f-חסומה ב-P
$f \in E(P) \Rightarrow f \in \mathscr{F}(P)$

הגדרה

1. Ω תחום סגור אם $\overline{\overset{\circ}{\Omega}} = \Omega$
2. $\partial\Omega = \overline{\Omega} \backslash \overset{\circ}{\Omega}$ שפה
3. Ω תחום פשוט אם $\partial\Omega = \bigcup_{j=1}^{s} M_j$ עבור M_j-C^r-משטחים.

הערה

אם Ω תחום חסום ופשוט אז $\Omega \in \mathscr{R}(P)$.

הוכחה

Ω חסומה ולכן קיים קטע n מימדי כך ש-$\Omega \subset P$
χ_Ω אי רציפה לכל היותר ב-$\partial\Omega$
$\partial\Omega = \bigcup_{j=1}^{n} M_j \Leftarrow \chi_\Omega$ רציפה חוץ מקבוצה במידה 0 ולכן $\chi_\Omega \in \mathscr{R}(P)$.

הגדרה

אם Ω קבוצה מדידה $\Omega \in \mathscr{R}(P)$ (וחסומה) אז לפי ההגדרה:
$V(\Omega) = \int_P \chi_\Omega dx = \int_\Omega 1 dx$