טופולוגיה - הרצאה 1

ליאור פולק

10 במרץ 2016

פרופסור מיכאל מגרל

אתר האינטרנט:

https://www.math.biu.ac.il/~megereli/TOP.html

Topology = Topos + Logos

1 מרחבים מטריים:

הגדרה 1: (1906 Frechet)

מטריקה על קבוצה לא ריקה X היא פונקציה $d : X \times X \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto d(x, y)$

המקיימת את האקסיומות הבאות:

1. $d(x, y) \iff x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$

אזי (X, d) ייקרא מרחב מטרי (Metric space)

הערה: ב $\mathbb{R}^2$,

3 $\iff$ אי-שיוויון המשולש.

דוגמה:

א. $(\mathbb{R}^2, d)$ כאשר $d(x,y) = ||x-y||$

$\Uparrow$

ב. $(\mathbb{R}^n, d)$ כאשר $d(x,y) = ||x-y|| = \sum_i \sqrt{(x_i-y_i)^2}$

הגדרה 2: נגדיר גם $1'$: $x = y \Rightarrow d(x,y) = 0$ במקום 1. אזי אם מתקיים $1'$ במקום 1 נקרא לפונקציה פסאודו–מטריקה.

נגדיר גם $3'$: $d(x,z) \le \max\{d(x,y), d(y,z)\}$ במקום 3. אזי אם מתקיים $3'$ במקום 3 נקרא לפונקציה אולטרה–מטריקה.

הערה: $3' \Rightarrow 3$, $1 \Rightarrow 1'$ ולכן אולטרה–מטריקה $\Leftarrow$ מטריקה $\Leftarrow$ פסאודו–מטריקה.

טענה: לכל פסאודו–מטריקה d מתקיים $d(x,y) \ge 0$.

הוכחה:

$$2d(x,y) = d(x,y) + d(x,y) \underbrace{=}_{\text{Symmetry}} d(x,y) + d(y,x) \underbrace{\ge}_{3} d(x,x) = 0$$
$$\Rightarrow d(x,y) \ge 0$$

דוגמה: $d_0(x,y) \equiv 0$ לכל $x, y \in X \ne \varphi$.

זוהי פסאודו–מטריקת האפס.

(זאת מטריקה $\iff |X| = 1$).

דוגמה:

$$(\mathbb{R}, 5d) : (5d)(x,y) \equiv 5 \cdot d(x,y)$$

דוגמה: לכל מ"מ (X,d) ניתן להגדיר את מטריקת הזום, $(X, c\cdot d)$. זהו מ"מ לכל $0 < c \in \mathbb{R}$.

דוגמה: לכל $X \ne \varphi$ נגדיר את המטריקה הדיסקרטית:

$d_\Delta(x,y) = \begin{cases} 1 & x \ne y, \\ 0 & x = y. \end{cases}$ זוהי אולטרה–מטריקה של 0–1.

מסקנה: על כל קבוצה בעלת שני איברים לפחות ניתן להגדיר ∞ אולטרה־מטריקות, למשל $\{c \cdot d_\Delta | c > 0\}$.

הגדרה 3: יהי (X,d) מרחב מטרי ונגדיר לכל $B,A\neq\varphi\subseteq X$,
$d(A,B)=\inf\{d(a,b)|a\in A,b\in B\}$
זהו המרחק בין שתי תתי-קבוצות של X.

הערה: זה תמיד מוגדר כמספר (אך לא תמיד שווה למינימום).
דוגמה: $X=\mathbb{R},A=\{0\},B=(0,1]\ \Rightarrow\ d(A,B)=0\neq\min$
שלא קיים.

תרגיל: לכל מרחב X ופסאודו-מטריקה D ולכל $\varphi\neq A\subseteq X$, מתקיים $||d(x,A)-d(y,A)||\leq$ $d(x,y)$.
רמז: הוכיחו עבור $A=\{a\}$ ועברו להגדרת ה-inf.

הגדרה 4: קוטר של תת-קבוצה במרחב מטרי יוגדר כ: $diam(A)=\sup\{d(x,y)|x,y\in A\}$.
תכונות:
א. $0\leq diam(A)\leq\infty$
ב. הגדרה 5: A חסומה אם $diam(A)<\infty$.
ג. איחוד סופי של קבוצות חסומות גם חסום.
ד. לכל מרחב-מטרי (X,d), $diam(A)=0\iff A=\{a\}$
ה. לא תמיד הסופרימום מתקבל כמקסימום, לדוגמה $diam((0,1))=1$ אבל אין שתי נקודות עבורן המרחק הוא 1.

הגדרה 6: לכל מרחב (X,d) ולכל $\varphi\neq Y\subseteq X$ נגדיר את מטריקת הצמצום $d_Y(y_1,y_2)\equiv d(y_1,y_2)$. מסמנים גם $d(y_1,y_2)$.
(Y,d_Y) נקרא אז תת-מרחב מטרי.

הגדרה 7: במרחב (X,d) נגדיר את הקבוצה
$B(a,r)=B_r(a)\equiv\{x\in X|d(a,x)<r\}$.
זהו כדור פתוח עם מרכז a ורדיוס r.
נגדיר גם $B[a,r]=B_r[a]\equiv\{x\in X|d(a,x)\leq r\}$.
זהו כדור סגור עם מרכז a ורדיוס r.
כמו כן, $S(a,r)=S_r(a)\equiv\{x\in X|d(a,x)=r\}$.
זוהי השפה של הכדור- ספירה.
תכונות: $a\notin S_r(a)\subset B_r[a] \quad a\in B_r(a)\subseteq B_r[a],$.

הגדרה 8:
א. נקודה $a\in X$ נקראת מבודדת אם $\exists r>0 \,|\; B_r(a)=\{a\}$
ב. מרחב נקרא דיסקרטי אם כל נקודה בו מבודדת.
דוגמה: $Y=[0,1]\cup\{7\}$, 7 מבודדת.
$Y=\mathbb{Z}\subset\mathbb{R}$ מבודדת ולכן דיסקרטית.

תרגילים:
א. $0\leq r_1\leq r_2\Rightarrow B_{r_1}(a)\subseteq B_{r_2}(a)$
ב. $diam(B_r[a])\leq 2r$ (האם תמיד שווה?)
ג. $A\subseteq X$ חסומה $\iff \exists a\in X,\exists 0<r\in\mathbb{R}|\; A\subseteq B_r(a)$
ד. (כדור בתת-מרחב) $B_{d_Y}(y,\epsilon)=B_d(y,r)\cap Y$

דוגמה: $X=\mathbb{R},Y=[2,6]$

$B_{d_Y}(2,\epsilon)=[2,2+\epsilon)$
$B(2,\epsilon)\cap Y=(2-\epsilon,2+\epsilon)\cap Y$

($\star$) ה. מצאו מרחב-מטרי X וכדורים שונים כך ש-
$B_{r_1}(a)\neq B_{r_2}(b),r_1>r_2,B_{r_1}(a)\subset B_{r_2}(b)$.

2 סדרות

<u>הגדרה 9</u>: נניח (X,d) מרחב מטרי $a \in X$, x_n סדרה ב-X.
אומרים ש- x_n <u>מתכנסת</u> ל-a אם $d(x_n,a) \to 0$ ב- $\mathbb{R}$.
נסמן $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ או $x_n \to^d a$.
<u>תרגיל</u>: לנסח בשפה של אפסילון-דלתא, כדורים.

<u>דוגמה</u>: $(\mathbb{R}^2,\rho_1)$ פסאודו-מטריקה,
$x=(x_1,x_2),\ \ y=(y_1,y_2),\ \ \rho_1(x,y)=|x_2-y_1|$.
אזי נסמן $(1, m\in\mathbb{R})$ $v_n(1+\frac{1}{n},7) \to^{\rho_1}$ ולכן יש ∞ גבולות.
לכן חשוב שזו תהיה מטריקה בהגדרה!

<u>דוגמה</u>: (מרחב קנטור אולטרה-מטרי)
נגדיר: $X=\{0,1\}^{\mathbb{N}}=\{x=(x_1,x_2\ldots)|\ x_i\in\{0,1\}\}$ סדרות של 0 ו-1.

נגדיר:
$$d(x,y)=d((x_n),(y_n))=\begin{cases}\frac{1}{k(x,y)} & k=\min\{n\in\mathbb{N}|\ x_n\neq y_n\},\\ 0 & x=y.\end{cases}$$
למשל:

$$x=(0,0,1,0\ldots),\ \ 0=(0,0\ldots)$$
$$d(x,0)=\tfrac{1}{3}$$
$$(0,0\ldots\underbrace{1}_{x_n},0\ldots)=e_n\to^d 0 \qquad (d(e_n,0)=\tfrac{1}{n}\to 1)$$
$$B(0,\tfrac{1}{3})=\{(0,0,?,?,\ldots)\}$$

<u>שימו לב</u>: $X=(\{0,1\}^{\mathbb{N}},d)$ חבורה טופולוגית (עם חיבור מודולו 2, נלמד בהמשך).
<u>תרגיל</u>: d אולטרה-מטריקה.

<u>דוגמה</u>: P-ADIC ULTRAMETRIC
ראשוניים $p\in\mathbb{P}$, $X=\mathbb{Z}$
$$d_p(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{p^{k(x,y)}} & k=\max\{i\in\mathbb{N}:\ p^i|(x-y)\},\\ 0 & x=y.\end{cases}$$

למשל:

$p=3, d_3(24,6)=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$
$B(0,\frac{1}{2})=3\mathbb{Z}$
$3^n \to^{d_3} 0$
$d(3^n,0)=\frac{1}{3^n}\to 0$

<u>נשים לב</u>: $(\mathbb{Z}, d_p)$ מרחב אולטרה מטרי וגם חבורה טופולוגית (ביחס לחיבור רגיל). המרחב לא דיסקרטי כי אין אף נקודה מבודדת.

<u>דוגמה</u>: מרחבים נורמיים.
<u>טענה</u>: לכל מרחב נורמי $(E, ||\cdot||)$ מוגדרת מטריקת הנורמה:
$d(x,y)=||x-y||$
ולכן $\textsc{Metric Spaces} \to \textsc{Normed Spaces}$ חח"ע אך לא על.

<u>דוגמה</u>:
1. $E=\mathbb{R}^n$
א. $||x||=\sqrt{\sum\limits_i x_i^2} \to d$ הנורמה האוקלידית גוררת את המטריקה האוקלידית.
ב. $||x||=\sum\limits_i x_i \to d_1$ מטריקת הסכום.
ג. $||x||_{\max}=||x||_\infty=\max\limits_{1\le i\le n}\{|x_i|\}$
2. $l_2=\{x=(x_1,x_2\ldots)|\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2<\infty\}$
$<x,y>=\sum\limits_i x_i y_i$
$||x||=\sqrt{<x,x>}=\sqrt{\sum\limits_i x_i^2}$
זהו מרחב הילברט (סדרתי).

3. $X = C[a,b]$ (כל הפונקציות הממשיות שרציפות ב- $[a,b]$)

א. $|f| \underset{a\leq x\leq b}{\max} = ||f||_{\max} \leftarrow d_{\max}$

ב. $|f(x)|dx \int_a^b = ||f||_1 \leftarrow d_1$

ג. $||f||_2 = \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx}$

<u>תרגיל:</u>

למצוא סדרה $f_n \in C[0,1]$ כך ש-

$$\begin{cases} f_n \to^{d_1} 0 \\ f_n \not\to^{d_{max}} 0 \end{cases}$$

טופולוגיה - הרצאה 2

ליאור פולק

13 במרץ 2016

<u>דוגמה</u>: ב- $C[0,1]$ קיימת סדרה f_n כך ש- $f_n \to^{d_1} 0$ אבל $f_n \not\to^{d_{\max}} 0$.

נגדיר $f_n(x) = x^n, \ 0 \le x \le 1$.

$$d_1(f_n,0) = \int_0^1 |x^n| dx = \frac{1}{n+1} \to 0$$
$$d_{max}(f_n,0) = \max_{0 \le x \le 1} |x^n - 0| = 1 \not\to 0$$

<u>הכללה</u>: ב- $C[a,b]$, כאשר $a < b$.

$\Leftarrow$ ההתכנסות לגבי d_1 ו-$d_{\max}$ שונה!

<u>הערה</u>: בעצם $d_{\max}$ היא מטריקה דומיננטית בהשוואה ל-d_1, ז"א

$$h_n(x) \to^{d_1} h(x) \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{And we've seen that } \not\Leftarrow} \quad h_n(x) \to^{d_{\max}} h(x).$$

<u>הסבר</u>: מתקיים $d_1(f,g) \le \underbrace{c}_{|b-a|} \cdot d_{\max}(f,g)$

מ"ל

$$\int_a^b |f(x)| dx \le |b-a| \max_{a \le x \le b} |f(x)|.$$

אבל זה נובע מ-

$$||f||_1 = \int_a^b |f(x)| dx \le \int_a^b \max_{a \le x \le b} |f(x)| dx = \max_{a \le x \le b} |f(x)| \int_a^b 1 dx$$
$$= (b-a) \cdot \max_{a \le x \le b} |f(x)| = (b-a) ||f||_{\max}$$

<u>טענה</u>: אם d, ρ מוגדרות מעל אותה קבוצה X ומתקיים

$$\forall x,y \in X, \quad \rho(x,y) \le c \cdot d(x,y)$$

כאשר $c > 0$ קבוע נתון, אזי d דומיננטי לגבי ρ.

ז"א $x_n \to^d a \Rightarrow x_n \to^\rho a$.

<u>הסבר</u>: משפט הסנדוויץ':

$$0 \le \rho(x_n,a) \le c \ d(x_n,a)$$

<u>הערה</u>: נוכיח בהמשך כי d דומיננטי לגבי ρ $\iff$ $top(\rho) \subseteq top(d)$.

<u>הגדרה 1</u>: <u>טופולוגיה</u> (TOPOLOGY) של מרחב (X,d) מוגדרת

$top(d) := \{(X,d)$-קבוצות פתוחות ב$\}$

$\star$ כאשר $A \subseteq X$ נקראת קבוצה פתוחה (במובן d) אם מתקיים

$$\boxed{\forall a \in A,\ \exists r_a > 0 : B_{r_a}(a) \subseteq A}$$

<u>משפט 1</u>: $B_r(a) \in top(d)$ ז"א כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה.

<u>הוכחה</u>:

צ"ל $\forall x \in B_r(a)\ \exists r_x > 0 :\ B_{r_x}(x) \subseteq B_r(a)$

<u>רעיון</u>:

$$d(0,x) + r_x < r$$

$$\Downarrow$$

ניקח r_x שמקיים $0 < r_x < r - d(a,x)$

ואז $B_{r_x}(x) \subseteq B_r(a)$.

בודקים שלכל $y \in B_{r_x}(x)$ מתקיים $\boxed{d(x,y) < r_x}$.

צ"ל $y \in B_r(a)$

ששקול להוכיח $d(a,y) < r$

אבל $d(a,y) \leq d(a,x) + d(x,y) < d(a,x) + r_x < d(a,x) + r - d(a,x) = r$

$$\Downarrow$$

$d(a,y) < r$ ■

<u>משפט 2</u>: $O \in top(d) \iff O$ שווה לאיחוד כלשהו של כדורים (פתוחים).

<u>הוכחה</u>: בה"כ נניח $\phi \neq O \in top(d)$.

$$\forall x \in O\ \exists r_x > 0 :\ B_{r_x}(x) \subseteq O$$

אזי $\bigcup_{x \in O} B_{r_x} = O$

הכיוון השני $\Leftarrow$ ברור בגלל המשפט $B_{r_x}(a) \in top(d)$

<u>משפט 3</u>: לכל <u>מרחב מטרי</u> ולכל $a,b \in X,\ a \neq b$ מתקיימת (תכונת HAUSDORFF):

קיימים כדורים <u>זרים</u> $\exists \epsilon > 0 :\ B_\epsilon(a) \cap B_\epsilon(b) = \phi$.

נזכור שבמרחב מטרי מתקיים לפי האקסיומות $a \neq b \Rightarrow 0 < d(a,b)$.

נבחר $0 < \epsilon \leq \frac{d(a,b)}{2}$ ובעזרת האקסיומה השלישית קל לבדוק כי $B_\epsilon(a) \cap B_\epsilon(b) = \phi$.

בשלילה נניח $\exists x \in B_\epsilon(a) \cap B_\epsilon(b)$

אזי

$$d(a,x) < \epsilon \wedge d(b,x) = d(x,b) < \epsilon$$

$$\Downarrow$$

$$d(a,b) \leq d(a,x) + d(x,b) < 2\epsilon < d(a,b)$$

$$\Downarrow$$

$d(a,b) < d(a,b)$ בסתירה! ■

משפט 4: (יחידות הגבול)

בכל מרחב מטרי הגבול הוא תמיד יחיד (אם הוא קיים!).

הוכחה: נניח בשלילה שיש 2 גבולות שונים לאותה הסדרה, a ו־b.

לפי תכונת האוסדורף יש $\epsilon > 0$ כך ש $B_\epsilon(a) \cap B_\epsilon(b) = \phi$.

לפי הגדרת הגבול (בעזרת ~~השם~~ הכדורים)

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}: \ x_n \in B_\epsilon(a) \ \forall n \geq n_1$$

$$\exists n_2 \in \mathbb{N}: \ x_n \in B_\epsilon(b) \ \forall n \geq n_2$$

ומכאן

$$\forall n \geq \max\{n_1, n_2\} : x_n \in B_\epsilon(a) \cap B_\epsilon(b) \neq \phi$$

וסתירה! ■

הערה: (צורות שקולות להגדרת הגבול)
לכל מרחב (X,d)

$$\bigstar\ d(x_n,a) \to^{\mathbb{R}} 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\bigstar\bigstar\ \forall \epsilon > 0\ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}:\ d(x_n,a) < \epsilon$$
$$\forall n \geq n_\epsilon$$
$$\Updownarrow$$
$$\bigstar\bigstar\bigstar\ \forall \epsilon > 0\ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}:\ x_n \in B_\epsilon(a)$$
$$\forall n \geq n_\epsilon$$

הגדרה 2: נניח ρ, d מטריקות מעל הקבוצה X.
אומרים:
א. d דומיננטית לגבי ρ אם $\boxed{x_n \to^d a \Rightarrow x_n \to^\rho a}$
ב. $\rho \sim d$ שקולות לגבי התכנסות אם $\boxed{x_n \to^d a \Leftrightarrow x_n \to^\rho a}$
ג. $\rho \sim^{top} d$ שקולות טופולוגית אם $\boxed{top(\rho) = top(d)}$
בהמשך נוכיח את השקילות ג $\Leftrightarrow$ ב.

דוגמה חשובה:
ב- $\mathbb{R}^n =: \mathbf{X}$ מתקיים $d_{\max} \sim d \sim d_1$.
הסבר: מתקיים $\forall n \in \mathbb{N},\ d_{\max} \leq d \leq d_1 \leq n \cdot d_{\max}$.
למשל, ב-$\mathbb{R}^2$, $d_{\max} \leq d \leq d_1 \leq 2 \cdot d_{\max}$.

דוגמה: השוואת כדורים ב- $\mathbb{R}^2$
~~(להשלים את הציור על המעגלים כאן)~~
חדש! ראו איור 1 בסוף הטקסט.
ונשים לב שהכדורים מוכלים.
תרגיל: לבדוק שאם $\rho \leq d$ אזי $B_\rho(x,r) \supseteq B_d(x,r)$.

<u>הגדרה 3</u>: קבוצה A במרחב (X,d) נקראת:

א. <u>סגורה</u> (Closed) אם $X \setminus A \in top$ (זהו המשלים A^c).

ב. <u>סגוחה</u> (Clopen) אם היא פתוחה וגם סגורה.

<u>הערה</u>: יש את כל 4 המצבים האפשריים ב-$\mathbb{R}$:

א. $(0,1)$ פתוחה אך לא סגורה

ב. $[0,1]$ סגורה אך לא פתוחה

ג. $(0,1]$ לא פתוחה וגם לא סגורה

ד. $\mathbb{R},\phi$ סגוחות

<u>הגדרה 4</u>: מרחב (X,d) נקרא <u>קשיר</u> (Connected) אם

$\{\phi, X\} = \{$קבוצות סגורות מ $(X,d)\}$

<u>הערה</u>: תמיד מתקיים $\subseteq$.

<u>דוגמה</u>: א. $X = [0,1] \cup \{5\}$ (כתת מרחב מטרי ב־ $\mathbb{R}$) לא קשיר!

שם $\{\phi, X, [0,1], \{5\}\}$ הן הקבוצות הסגוחות.

ב. $X = \mathbb{Q}$ לא קשיר!

$A := (-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$ סגוחה!

<u>הגדרה 5</u>: רציפות.

נניח כי $(X,d), (Y,\rho)$ מרחבים. אזי פונקציה $f: X \to Y$ נקראת <u>רציפה בנקודה $a \in X$</u> אם:

א. $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ (depends on a) $: \ d(x,a) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(a)) < \epsilon$

ב. $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ : \ f(B_\delta(a)) \subseteq B_\epsilon(f(a))$

אומרים כי f רציפה (גלובלית) אם היא רציפה בכל נקודה $a \in X$.

נסמן: $f \in C((X,d),(Y,\rho))$, $C =$ Continuous f.

<u>הגדרה 6</u>: במ"ש.

f נקראת רציפה במ"ש uniformly continuous אם $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ : d(x,a) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(a)) < \epsilon$

$\forall x, a \in X$

כאן בחירת הδ אינה תלויה בa!!!

תמיד- $f \in UC(X,Y) \subseteq C(X,Y)$

<u>הגדרה 7</u>: f נקראת <u>פונקציית ליפשיץ</u> (Lipschitz) בעלת המקדם c

אם מתקיים: $\forall x, a \in X \quad \rho(f(x), f(a)) \le c \cdot d(x,a)$

$f \in Lip_c(X,Y) \subseteq UC(X,Y) \subseteq C(X,Y)$

(<u>הערה</u>: המרצה אומר שאפשר להחליף קטן וקטן שווה בהגדרות שלנו ועדיין זו תהא הגדרה שקולה!)

<u>דוגמה חשובה</u>: לכל $\phi \neq A \subseteq X$

נגדיר- $f_A(x) := d(x,A), \quad f_A : X \to [0,\infty)$

$f_A \in Lip_c(X,\mathbb{R}) = Lip_1(X)$ כי תמיד $|d(x,A) - d(y,A)| \le 1 \cdot d(x,y)$.

עוד דוגמה חשובה: לכל מרחב נורמי $(E, ||\cdot||)$
$||\cdot|| : E \to [0, \infty) \in Lip_1(E)$
כי תמיד $|\ ||u|| - ||v||\ | \leq 1 \cdot ||u - v||$.

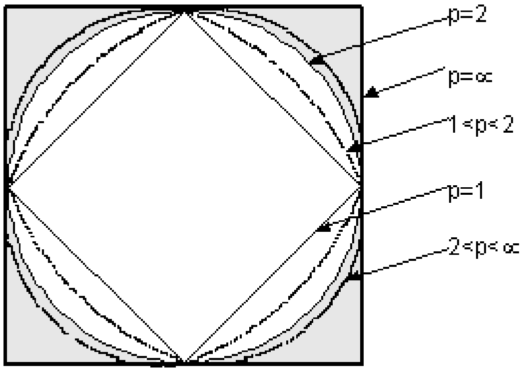
הגדרה 8: נניח כי $(X, d), (Y, \rho)$ מרחבים מטריים. אזי פונקציה $f : X \to Y$ נקראת "שיכון איזומטרי" אם f שומרת מרחק, ז"א $\forall x, a \in X, \quad \rho(f(x), f(a)) = d(x, a)$.

הערה: שיכון איזומטרי היא פונקציה חח"ע. זה נובע מהאקסיומה הראשונה של מטריקה.
אומרים שזוהי גם איזומטריה אם f היא שיכון איזומטרי על $(X, d) \cong^{iso} (Y, \rho)$.
תרגיל: לבדוק ש- $\cong^{iso}$ מקיים שקילות, ז"א סימטרי, רפלקסיבי וטרנזיטיבי.
נשים לב שאיזומטריה שומרת על כל התכונות המטריות (וגם על תכונות טופולוגיות).

דוגמות:
א. כל שיכון איזומטרי הוא פונקציית ליפשיץ
ב. לכל מרחב נורמי $(E, ||\cdot||)$ כל הזזה $T_v : E \to E, x \to v + x$ היא איזומטריה. בדיקה: $||(v + x) - (v + y)|| = ||x - y||$
ג. סיבובים ושיקופים ב- $\mathbb{R}^2$ הם איזומטריה
ד. בדקו שהזזות במרחב $(\mathbb{Z}, d_p)$ הן איזומטריות, וגם במרחב קנטור $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, d)$

תרגיל: מצאו שני מרחבים מטריים כך ש $X \ncong^{iso} Y$ אך קיימים שיכונים איזומטריים $X \hookrightarrow Y, Y \hookrightarrow X$.

איור 1:



טופולוגיה - הרצאה 3

ליאור פולק

13 במרץ 2016

<u>תרגיל:</u> מצאו שני מרחבים מטריים כך ש $X \ncong^{iso} Y$ אך קיימים שיכונים איזומטריים $X \hookrightarrow Y, Y \hookrightarrow X$.

<u>פתרון:</u>

1. $\underbrace{\mathbb{N}\setminus\{2\}}_{B_2(1)=\{1\}} \ncong^{iso} \underbrace{\mathbb{N}}_{\forall x\colon B_2(x)\neq\{x\}}$ לכן הם לא איזומטריים (אבל יש שיכונים איזומטריים לכל כיוון)

2. $(3,\infty) \ncong^{iso} [0,\infty)$ ברור איך $(3,\infty)$ משוכן ב־$[0,\infty)$ על-ידי שיכון של תתי-קבוצות. לכיוון השני נבצע הזזה ימינה (בארבע). אבל- $(3,\infty)$ לא שלם ($a_n = 3+\frac{1}{n}$ סדרת קושי שלא מתכנסת) ואילו $[0,\infty)$ שלם!

<u>עוד דוגמות של שיכון איזומטרי:</u>

1. $\forall n \leq m,\ \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$
$(x_1,\ldots,x_n) \mapsto (x_1,\ldots,x_n,0,\ldots,0)$
זהו שיכון איזומטרי <u>לינארי</u>

2. $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \ell_2$
$(x_1,\ldots,x_n) \mapsto (x_1,\ldots,x_n,0,\ldots)$
זהו שיכון איזומטרי <u>לינארי</u>

3. $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, אופרטור אורתוגונלי

4. קיים מ"מ $X = (\{a,b,c,d\},\rho) \not\hookrightarrow^{iso} \mathbb{R}^n$, ואפילו ℓ_2.
נגדיר את ρ:
$\rho(a,b)=\rho(a,c)=\rho(c,d)=\rho(b,d)=1$
$\rho(a,d)=\rho(b,c)=2$
$\rho(x,x)=0$

<u>הרעיון:</u> אם X משוכן לתוך $\mathbb{R}^n$ אזי b צריך להיות באמצע של הקטע שמחבר את a,d. באופן דומה גם c ואזי נקבל $b=c$ בסתירה.

<u>משפט 1</u>: (עקרון היינה (Heine))
נניח כי (X,d) ו- (Y,ρ) מ"מ ונתונה פונקציה $f:X\to Y$. אזי התנאים הבאים שקולים:

1. f רציפה
2. f שומרת על התכנסות
$$x_n \to^d a \Rightarrow f(x_n) \to^\rho f(a)$$
3. המקור של קבוצה פתוחה גם הוא פתוח
$$\forall O \in top(\rho) \quad f^{-1}(O) \in top(d)$$

<u>הוכחה</u>: $1 \to 2$
נתון $x_n \to^d a$. צ"ל $f(x_n) \to^\rho f(a)$.
f רציפה $\Leftarrow$ f רציפה ב-$a \in X$.
$$\boxed{\forall \epsilon > 0\, \exists \delta = \delta_a > 0 : \quad f(B_\delta(a)) \subseteq B_\epsilon(f(a))}$$
$$x_n \to^d a \Rightarrow \exists n_0 \,\forall n > n_0 : \quad x_n \in B_\delta(a)$$
$$\Downarrow$$
$$\forall n \geq n_0 \quad f(x_n) \in f(B_\delta(a)) \subseteq B_\epsilon(f(a))$$
ז"א $f(x_n) \to^\rho f(a)$.

$2 \to 3$
נניח בשלילה $\exists O \in top(\rho) : \quad f^{-1}(O) \notin top(d)$
ז"א $f^{-1}(O)$ לא פתוחה.
ז"א, a לא פנימית ב- $f^{-1}(O)$ $\quad \exists a \in f^{-1}(O) :$
ז"א $\forall \epsilon > 0 \quad B_\epsilon(a) \nsubseteq f^{-1}(O)$
ז"א $(\epsilon := \frac{1}{n})$ $\quad \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n : \quad x_n \in B_{\frac{1}{n}}(a) \wedge x_n \notin f^{-1}(O)$
$$0 \leq d(a,x_n) < \frac{1}{n} \Rightarrow d(a,x_n) \to 0 \Rightarrow x_n \to^d a$$
ולכן $f(x_n) \notin O \wedge f(a) \in O \in top(\rho)$
ולכן קיים $\epsilon > 0$ כך ש- $B_\epsilon(f(a)) \subseteq O$
ולכן $\forall n \in \mathbb{N} : \quad f(x_n) \notin B_{epsilon}(f(a))$
בכדור הזה לא נמצא אף איבר מהסדרה, ולכן $f(x_n) \not\to^\rho f(a)$
בסתירה להנחה 2. לכן $2 \to 3$.

$1 \to 3$
בודקים את הרציפות "דרך הכדורים".
$$O := B_\epsilon(f(a)) \in top(\rho), \quad \epsilon > 0$$
$$3 \to a \in f^{-1}(O) \in top(d)$$
a פנימית ב- $f^{-1}(O)$ ולכן (לפי הגדרת פתיחות) $\quad \exists \delta > 0 : \quad B_\delta(a) \subseteq f^{-1}(O)$
$$\Downarrow$$
$$f(B_\delta(a)) \subseteq f f^{-1}(O) \subseteq O = B_\epsilon(f(a))$$
הוכחנו רציפות בנקודה a (לכל a), ולכן f רציפה!

<u>משפט 2</u>: (ההשוואה) נניח d, ρ מטריקות על X.
התנאים הבאים שקולים:

1. $top(\rho) \subseteq top(d)$

2. $x_n \to^d a \Rightarrow x_n \to^\rho a$
זה אומר שd דומיננטי ביחס ל-ρ.

<u>תוצאה</u>:

1. $top(\rho) = top(d) \quad (\rho \sim^{top} d)$

2. $x_n \to^d a \iff x_n \to^\rho a \quad (\rho \sim^{\text{CONVERGENCE}} d)$

<u>הוכחה</u>: במשפט עקרון היינה ניקח $(X, d) \to^{f=id} (X, \rho)$.
<u>שימו לב</u>: כאן $f^{-1}(O) = O$.
נקבל אפוא, אם f רציפה,
$\forall O \in top(\rho) : \quad O \in top(d) \Rightarrow top(\rho) \subseteq top(d)$.
זה מוכיח $1 \to 2$.
$2 \to 1$ נובע מהמשפט הקודם.

<u>דוגמה</u>:

1. $X = \mathbb{R}^n, \boxed{top(d_{\max}) = top(d) = top(d_1)}$
<u>הסבר</u>: לפי התוצאה, אם ניקח בחשבון:
$(\mathbb{R}^n, d_1) \to^{id} (\mathbb{R}^n, d) \to^{id} (\mathbb{R}^n, d_{\max}) \to^{id} (\mathbb{R}^n, d_1)$
הפונקציות הן פונקציות ליפשיץ $d_{\max} \le d \le d_1 \le n \cdot d_{\max}$

2. $X = C[a, b], \quad a < b, \quad top(d_1) \subsetneqq top(d_{\max})$
<u>הסבר</u>: משפט ההשוואה/ היינה + $||f||_1 \le (b-a) \cdot ||f||_{\max}$
$\Downarrow$
$(C[a, b], d_{\max}) \to^{id} (C[a, b], d_1)$ פונקציית ליפשיץ. זה מוכיח $\subseteq$.
$\neq$ כי ראינו דוגמה מתאימה
$x^n \to^{d_1} 0, x^n \not\to^{d_{\max}} 0$.

<u>דוגמה</u>: מצא $O \subset C[0, 1]$ כך ש- $O \in top(d_{\max}), O \notin top(d_1)$

<u>הערה</u>: במשפט היינה, $4 \iff 3 \iff 2 \iff 1$
כאשר טענה 4 תהא המקור של קבוצה סגורה גם סגור.
<u>הסבר</u>: לפי הגדרת הסגירות, A סגורה $\iff$ A^c פתוחה, וניקח בחשבון $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$.

<u>דוגמה</u>: הוכיחו שמישור הוא קבוצה סגורה במרחב, $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 2x + 3y - z = 0\}$.

<u>הסבר</u>: $A = f^{-1}(O), f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x,y,z) = 2x + 3y - z$

$0 \in \mathbb{R}$ הוא קבוצה סגורה (שכן כל נקודה במ"מ היא קבוצה סגורה). לפי הרציפות של פונקציה פולינומיאלית, ולפי משפט היינה (סעיף 4), נקבל כי $A = f^{-1}(O)$ גם סגור.

<u>דוגמה</u>: כדור סגור תמיד סגור.

צ"ל $B_r[a] = \{x \in X | d(a,x) \leq r\}$ סגור.

נגדיר פונקציה $C(X,\mathbb{R}) \supset Lip_1 \ni f_a : X \to \mathbb{R}$

$f_a(x) = d(a,x)$

$B_r[a] = f^{-1}((-\infty, r]) = f^{-1}([0,r])$

$(-\infty, r]$ סגור ב-$\mathbb{R}$, ולכן גם $f^{-1}((-\infty, r])$ סגור.

<u>תרגיל</u>: הוכיחו שבכל מ"מ השפה של כדור $S_r(a)$ היא קבוצה סגורה.

<u>הגדרה 1</u>: כדור מוכלל- $B_r(A) := \{x \in X | d(x,A) < r\}$

1 סדרות קושי ושלמות

הגדרה 2: סדרה x_n במ"מ (X,d) נקראת סדרת קושי (Cauchy) אם
$$\forall\epsilon>0\exists n_0\in\mathbb{N},\forall i,j>n_0:\quad d(x_i,x_j)<\epsilon$$

טענה: כל סדרה מתכנסת היא סדרת קושי (לפי האקסיומה השלישית של מטריקה).

הגדרה 3: אומרים ש- (X,d) מ"מ שלם (Complete) אם מתקיים גם ההפך, ז"א כל סדרת קושי מתכנסת.

דוגמה:

1. $\mathbb{R}^n$ שלם
2. כל מ"מ קומפקטי הוא שלם
   הגדרה 4: מ"מ (X,d) נקרא קומפקטי (סדרתית) אם לכל סדרה יש תת-סדרה מתכנסת.
   הערה: בהמשך נוכיח כי (X,d) מ"מ קומפקטי (סדרתית) אם"ם (X,d) קומפקטי במובן הכיסויים (ז"א אם לכל כיסוי פתוח של X יש תת-כיסוי סופי).
   ההסבר של 2 מבוסס על תכונה פשוטה וחשובה- אם x_n סדרת קושי ו-x_{n_k} תת-סדרה מתכנסת אזי גם x_n גם מתכנסת לאותו גבול. זה נובע מהאקסיומה השלישית של מטריקה.
   תזכורת: עבור $X\subset\mathbb{R}^n$ מתקיים כי X קומפקטי $\iff$ X סגור וחסום.
   הגדרה 5: מ"נ $(E,||\cdot||)$ נקרא מרחב בנך Banach space אם $(E,d_{||\cdot||})$ שלם.
3. $\ell_1,\ell_2,\ell_\infty$ הם מרחבי בנך
   $\ell_\infty=\{x=(x_1,x_2\ldots)|\sup|x_k|<\infty,\ \sup|x_k|=||x||\}$ סדרות חסומות ממשיות.
   הכללה- $\ell_\infty(X):=\{f:X\to\mathbb{R}|\sup\limits_{x\in X}|f(x)|<\infty\}$ מרחב של פונקציות חסומות (מרחב בנך).
   לכן $\ell_\infty=\ell_\infty(\mathbb{N})$.

משפט 3: תת-קבוצה סגורה בתוך מרחב מטרי שלם היא גם שלמה.

משפט 4: גם ההפך של המשפט הקודם נכון- אם תת-קבוצה של מרחב מטרי שלם היא שלמה, אזי תת-הקבוצה בהכרח סגורה.

דוגמה: מרחבים שהם לא שלמים:

1. כל דבר שלא סגור (ממשפט 2)
למשל: $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \mathbb{Q}, (3, \infty)$.
הערה: קיימת מטריקה ρ שלמה על $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ כך ש- $d \sim^{top} \rho$.
הערה: $\underbrace{\mathbb{R}}_{\text{Complete}} \simeq \underbrace{(0, \infty)}_{\text{Incomplete}} \simeq \underbrace{(-1, 1)}_{\text{Incomplete}}$.
2. $(\mathbb{Z}, d_p)$ לא שלם
$a_n := 1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{n-1}$ היא סדרת קושי שלא מתכנסת.
הערה: "השלמה" של $(\mathbb{Z}, d_p)$ הוא מרחב חשוב שנקרא מספרים p–אדיים, $(\hat{\mathbb{Z}}, \hat{d}_p)$.
תזכורת: $\hat{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.
על ההשלמה עצמה נדבר בשבוע הבא.

תרגיל לסיום השיעור: תנו דוגמה של סדרת קושי שלא מתכנסת במרחב $(C[0, 1], d_1)$. הסיקו שמרחב זה לא שלם.

טופולוגיה - הרצאה 4

ליאור פולק

20 במרץ 2016

1 קבוצות סגורות במ"מ

נניח (X,d) מ"מ, $A \subseteq X$.

<u>תזכורת</u>:

1. A סגורה $=^{def}$ A^c פתוחה $(A^c \in top(d))$
2. הסגור של A $=^{def}$ $cl(A) = \overline{A} := \{x \in X |\ d(x,A) = 0\}$
   תמיד מתקיים: $\boxed{A \subseteq cl(A)}$
3. הסגור הסדרתי של A $=^{def}$ $scl(A) := \{x \in X |\ \exists a_n \in A :\ \lim a_n = x\}$
   תמיד מתקיים: $\boxed{A \subseteq scl(A)}$ (לדוגמה, על-ידי סדרות קבועות).

<u>משפט 1</u>: במ"מ, $scl(A) = cl(A)$.

<u>הוכחה</u>: $\subseteq$

נניח $z \in scl(A)$

$$z = \lim a_n \wedge a_n \in A$$

$$d(z, a_n) \to^{\mathbb{R}} 0$$

$$\Downarrow$$

$$d(z, \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$d(z, A) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$z \in cl(A)$$

$\supseteq$

$z \in cl(A)$

$\Downarrow$

$\inf_{a\in A} d(z,a) = d(z,A) = 0$

לפי הגדרת $\inf$ יש $a_n \in A$ כך ש-

$\underbrace{d(z,a_n)}_{\to 0} < \frac{1}{n}$

$\Downarrow$

$\lim a_n = z \in scl(A)$ <u>הגדרה 1</u>: בכל מ"מ (X,d) התנאים הבאים שקולים:

1. A סגורה ב-X
2. $A = scl(A)$
3. $A = cl(A)$
4. $\exists f \in C(X,\mathbb{R})\ \ A = f^{-1}(0)$

(A = קבוצת האפסים של פונקציה רציפה ממשית)

<u>הוכחה</u>: א $\Leftarrow$ ב

נניח בשלילה שקיים

$z \in scl(A)$

$z \notin A$

$\Downarrow$

$z = \lim a_n \ \ \exists a_n \in A$

$z \in A^c \in top(d)$

$\Downarrow$

$\exists r > 0 \ \ B_r(z) \subseteq A^c$

מכאן נקבל כי

$\forall n \in \mathbb{N} \ \ a_n \notin B_r(z)$

בסתירה לכך ש- $z = \lim a_n$

ב $\Leftarrow$ ג

ישר נובע $scl(A) = cl(A)$ ממשפט 1.

ג $\Leftarrow$ ד

$f_A(x) := d(x,A)$

$Lip \ni f_A : X \to \mathbb{R}, \ \ cl(A) = f_A^{-1}(0)$

ד $\Leftarrow$ א

$\{0\}$ קבוצה סגורה ב- $\mathbb{R}$.

לכן גם $f^{-1}(0)$ גם סגור ב-X (לפי משפט היינה, התוספת- מקור של סגור גם סגור). ■

הגדרה 2: במ"מ (X,d) עבור $A\subseteq X$ נגדיר
$A':=\{x\in X|\ \ x\in scl(A\backslash\{x\})\}$
תנאים שקולים:
$z\in A' \iff \exists a_n\in A: z=\lim a_n,\ \ a_n\neq z \iff \exists a_n\in A: z=\lim a_n$ שכל איבריה שונים זה מזה ומהגבול.

הערה:

1. סדרה קבועה לבסוף תמיד מתכנסת
2. $z \iff z\notin A'$ נקודה מבודדת בתת המרחב $A\cup\{z\}$

דוגמה: $[0,1]\subseteq\mathbb{R}, A=[0,1]\cup\{2\}, A'=[0,1]$

הערה: $cl(A)=A'\cup A$
תרגיל: A סגורה $\iff A'\subseteq A$
תרגיל: הוכיחו שכל קבוצה סגורה במ"מ היא קבוצת G_δ
(כאשר קבוצה במרחב מטרי נקראת קבוצת G_δ אם $A=\cap_{n\in\mathbb{N}}\ \ \exists O_n\in top(d)$)
כל קבוצה פתוחה במ"מ היא קבוצה F_σ, וזו מוגדרת ע"י איחוד בן מנייה של קבוצות סגורות.

2 מכפלה קרטזית של מ"מ

נניח (X_k,d_k) מ"מ $\forall k\in\{1,\ldots,n\}$.
מטריזציות (הפיכת המרחב למרחב מטרי) סטנדרטיות של $X=\prod_{k=1}^{n}X_k$ "דומה" למטריזציות של $\mathbb{R}^n$.

1. $d(x,y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}d_k^2(x_k,y_k)}$
2. $d(x,y)=\sum_{k=1}^{n}d_k(x_k,y_k)$
3. $d(x,y)=\max_{1\le k\le n}\{d_k(x_k,y_k)\}$

תרגיל: $d_{max}\sim d\sim d_1\Rightarrow top(d_{\max})=top(d)=top(d_1)$
תרגיל: לכל מטריקה d על X קיימת מטריקה ρ כך ש- $d\sim\rho,\rho\le 1$
הסבר: רמז- $\rho(x,y):=\min\{d(x,y),1\}$

מקרה של סדרת מ"מ:
$k\in\mathbb{N},\ \ (X_k,d_k)$
אחת מהמטריזציות הטבעיות של $X=\prod_{k\in\mathbb{N}}X_k$ היא $d(x,y):=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\rho_k(x_k,y_k)$
כאשר $\rho_k=\min\{d_k,1\},\ \ x=(x_1,x_2,\ldots),\ \ y=(y_1,y_2,\ldots)$

דוגמה חשובה של מרחב בנך:

נניח X קבוצה נתונה לא ריקה.

נגדיר מרחב וקטורי של פונקציות חסומות

$\ell_\infty(x) := \{f : X \to \mathbb{R} | f(x) \text{IS BOUNDED IN } \mathbb{R}\}, \ ||f||_{\sup} = \sup_{x \in X} |f(x)|$

$(\ell_\infty(x), ||\cdot||_{\sup})$ מרחב נורמי שלם (דהיינו מרחב בנך).

מקרים פרטיים:

1. $X = \mathbb{N}$ ואז מסמנים $\ell_\infty(X) =$ כל הסדרות החסומות
2. $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ ואז $\ell_{\infty(X)} = (\mathbb{R}^n, ||\cdot||_{\max}$

הערה חשובה:

כל מ"מ (X, d) הוא איזומטרי לתת מרחב מטרי של $\ell_\infty(X)$.

איך? נבחר $z \in X$ ואז נגדיר $a \mapsto \tilde{a} = \varphi(a) \in \ell_\infty(X)$ כאשר $\tilde{a}(x) = d(a, x) - d(z, x)$, והוכיחו ש-$\varphi$ שיכון איזומטרי.

מסקנה 1: $\{$מ"מ$\}$=$\{$תת-מ"מ במרחבי בנך$\}$

מסקנה 2: לכל מ"מ (X, d) יש שיכון איזומטרי $(X, d) \hookrightarrow^i M := cl(\varphi(x)) \subset \ell_\infty(X)$ כך שמתקיים כי M שלם וגם השיכון i הוא צפוף, דהיינו $cl(i(X)) = M$

מסקנה 3: לכל מ"מ יש השלמה.

הגדרה 3: נניח (X, d) מ"מ. השלמה של (X, d) היא שיכון איזומטרי $X \hookrightarrow^i M$ כך ש-M שלם וגם $cl(i(X)) = M$.

משפט 2: לכל מ"מ יש השלמה.

הוכחה: דרך 1:

דרך משפט על $\ell_\infty(X)$.

$$X \hookrightarrow^\varphi \ell_\infty(X) - \text{BANACH SPACE, COMPLETE NORMED SPACE}$$

נגדיר

$$X \hookrightarrow^i M := \underbrace{cl(i(X))}_{\text{CLOSURE IN } \ell_\infty(X)} \subset \ell_\infty(X)$$

דרך 2:

טענת עזר: נניח (X, ρ) מרחב פסאודו-מטרי. אזי היחס Ω, $x \Omega y =^{def} \rho(x, y) = 0$ הוא יחס שקילות על X. הפונקציה $\rho([x], [y]) = \rho(x, y)$ מגדירה מטריקה על קבוצה המנה $X_* := X/\Omega$, וגם הפונקציה הטבעית $j(x) = [x]$, $X \to^j X_*$ שומרת מרחק.

דוגמה: $X = \mathbb{R}^2, \rho(x, y) = |x_1 - y_1|$. כאן $X_* = \mathbb{R}$.

בחזרה לבניית ההשלמה.

<u>שלב א</u>:

נגדיר מרחב סדרות קושי של (X,d), $\tilde{X}=\{\textsc{Cauchy sequences in } (X,d)\}$.

נגדיר $\rho:\tilde{X}\times\tilde{X}\to[0,\infty)$ על-ידי $\rho(x,y)=\rho((x_n),(y_n))=\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,y_n)$.

אזי $(\tilde{X},\rho)$ מרחב פסאודו-מטרי.

<u>שלב ב</u>:

מעבר ממרחב פסאודו-מטרי למ"מ טבעי דרך טענת עזר.

$(\tilde{X},\rho)\to(\hat{X},\hat{\rho})$.

נסמן: $\hat{X}=\tilde{X}_*,\ \hat{\rho}=\rho_*$

<u>שלב ג</u>:

$X\overset{i}{\hookrightarrow}(\hat{X},\hat{\rho}), x\mapsto(x_n=x)$, שזוהי סדרה קבועה.

נשים לב- i שיכון איזומטרי צפוף, וגם $(\hat{X},\hat{\rho})$ שלם.

<u>דוגמה</u>: $\widehat{\mathbb{Q}}=\mathbb{R},\widehat{\mathbb{Q}^n}=\mathbb{R}^n$ ותרגיל- מכפלה סופית של מ"מ (בדרך זו) שומרת על השלמות.

<u>דוגמה</u>: $(\widehat{C([a,b])},\widehat{d_1})=\mathcal{L}_1$ מרחב הפונקציות האינטגרביליות.

<u>הערה</u>: $(C([a,b]),d_1)$ לא שלם. למשל: (צריך לצלם כאן, שמישהו יזכיר לי)

<u>דוגמה</u>: $(\widehat{C([a,b])},\widehat{d_2})=\mathcal{L}_2$ מרחב הילברט

<u>דוגמה</u>: $(\widehat{\mathbb{Z}},\widehat{d_p})$ זהו חוג קומפקטי של מספרים p-אדיים.

$$\widehat{\mathbb{Z}}=\sum_{k=0}^{\infty}b_kp^k,\quad b_k\in\{0,1,\ldots,p-1\}$$

$$\widehat{\mathbb{Z}}=\lim\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$$

3 מרחבים טופולוגיים

<u>הגדרה 4</u>: נניח X קבוצה לא ריקה.

$\tau\subseteq P(X):=\{A|\ A\subseteq X\}$ המשפחה של תת-קבוצות ב-X נקראת <u>טופולוגיה</u> אם:

T1. $\phi,X\in\tau$

T2. $O_1,O_2\in\tau\Rightarrow O_1\cap O_2\in\tau$

T3. $O_1\in\tau\Rightarrow\bigcup\limits_{i\in I}O_i\in\tau$

(X,d) נקרא <u>מרחב טופולוגי</u>. כל $O\in\tau$ נקרא <u>קבוצה פתוחה</u>.

<u>דוגמה</u>: לכל מרחב פסאודו-מטרי (X,d), $(X,top(d))\in TOP$ מרחב טופולוגי. יש לבדוק את האקסיומות.

טופולוגיה - הרצאה 5

ליאור פולק

27 במרץ 2016

1 מרחבים טופולוגיים

הגדרה 1: נניח X קבוצה לא ריקה.
$\tau \subseteq P(X) := \{A|\ A \subseteq X\}$ המשפחה של תת-קבוצות ב-X נקראת טופולוגיה אם:

T1. $\phi, X \in \tau$

T2. $O_i \in \tau \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{n} O_i \in \tau$

T3. $O_i \in \tau \Rightarrow \bigcup\limits_{i \in I} O_i \in \tau$

(X, τ) נקרא מרחב טופולוגי.

דוגמה: $(X, top(d))$ מ"ט לכל פסאודו-מטריקה d.
רמז: לפי הגדרת פתיחות ב- (X, d),
$A \subset X$ היא לא פתוחה $\iff$ קיימת נקודה $a \in A$ כך ש $\forall r > 0 : \quad B_r(a) \nsubseteq A$
$\Downarrow$
$\phi \in top(d)$

Fathers of topology–
Urysohn, Alexandrov, Hausdorff, Frechet

הגדרה 2: מ"ט (x, τ) נקרא (פסאודו)-מטריזבילי אם קיימת (פסאודו)-מטריקה d על X כך ש- $\tau = top(d)$.
הגדרה 3: נניח (x, τ) מ"ט, $A \subseteq X$.

1. A סגורה $A^c \in \tau =^{def}$ (דהיינו, אם המשלים פתוח).
תזכורת: איברים מ-τ הם קבוצות פתוחות של מ"ט נתון.

2. $A \subseteq X$ קב' סגוחה אם A פתוחה וגם סגורה.

טענה: (תכונות בסיסיות של קבוצות סגורות)

1CT. X, ϕ סגורות

2CT. איחוד סופי של קבוצות סגורות גם הוא סגור

3CT. חיתוך כלשהו של סגורות גם הוא סגור

הוכחה: דה מורגן והגדרת מ"ט.

הגדרה 4: מ"ט נקרא לא קשיר אם קיים לו פירוק טופולוגי.

ז"א, קיים
$$\begin{cases} X = X_1 \cup X_2 \\ X_2, X_1 \in \tau \backslash \phi \\ X_1 \cap X_2 = \phi \end{cases}$$

טענה: X לא קשיר $\iff$ קיימת קבוצה סגוחה A שהיא לא ריקה וגם לא X.

הסבר:

$X_1 = A, X_2 = A^c$

בעצם בהגדרה הנ"ל X_1, X_2 סגוחות.

הגדרה 5: מ"ט X נקרא קשיר אם לא קיים לו פירוק טופולוגי (וזה שקול לכך שהקבוצות הסגוחות ב-X הן רק X ו-ϕ).

הגדרה 6:

1. $a \in X$ נקראת נקודה מבודדת במ"ט (X, d) אם $\{a\} \in \tau$.
2. מרחב טופולוגי נקרא דיסקרטי אם כל נקודה מבודדת בו
   שקול: $\tau = P(X)$ (נובע מ-t_3). טופולוגיה זו נקראת הטופולוגיה הדיסקרטית.

הגדרה 7: $\tau_{tr} = \{\phi, X\}$; (X, τ_{tr}) נקרא מ"ט טריוויאלי.

תרגיל: (X, τ_{tr}) תמיד פסאודו-מטריזבילי.

הסבר: ניקח את $\forall x, y \in X, \quad d_0(x,y) = 0$.

תרגיל: (X, τ_{tr}) תמיד מטריזבילי.

הסבר: ניקח את המטריקה
$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

הערה: לכל טופולוגיה τ על X מתקיים $\tau_{tr} \subseteq \tau \subseteq \tau_{discr}$.

דוגמה: על הקבוצה $X=\{a,b\}$ נגדיר את טופולוגיית סרפינסקי SIERPINSKI
$\tau_{\leq}=\{\phi,\{a\},\{a,b\}\}$ טענה: $(X,\tau_{\leq})$ לא פסאודו-מטריזבילי.
הסבר: נניח בשלילה שכן. אזי $\exists d_{\text{PSEUDOMETRIC}},\quad \tau_{\leq}=top(d)$.
יש כאן שני מקרים.
מקרה ראשון:

$$d(0,1)=0$$
$$\Downarrow$$
$$d=d_0$$
$$\Downarrow$$
$$top(d)=top(d_0)=\{\phi,\{0,1\}\}\neq\tau_{\leq}$$

בסתירה!
מקרה שני:

$$d(0,1)=r>0$$
$$\Downarrow$$
$$d \text{ IS A METRIC}$$
$$\Downarrow$$
$$d=r\cdot d_{1,0}$$
$$\Downarrow$$
$$top(d)=top(r\cdot d_{1,0})=top(d_{1,0})=\tau_{disc}\neq\tau_{\leq}$$
$\blacksquare$

דוגמה: (טופולוגיה קו-סופית)
בקבוצה X נגדיר $\tau_{cof}=\{F^c:\quad |F|<\infty\}\cup\{\phi\}$.
בדקו ש- (X,τ_{cof}) מ"ט.

2 אקסיומות הפרדה

נניח (X,τ) מרחב טופולוגי.

הגדרה 8: נקרא למרחב טופולוגי בעל תכונה T_0 אם לכל $a \neq b$ ב-X מתקיים לפחות אחד מהתנאים הבאים:

1. קיימת קבוצה פתוחה $u \in \tau$ שמכילה את a ולא את b.
2. קיימת קבוצה פתוחה $v \in \tau$ שמכילה את b ולא את a.

הסימון הוא $(X,\tau) \in T_0$. למשל, $T_0 \ni (\{0,1\},\tau_{\leq})$, וכאן מתקיים רק 1.

הגדרה 9: במ"ט (X,τ) תהי $a \in A \subseteq X$.
אומרים ש-a נקודה פנימית של A ומסמנים $a \in A^0$ OR $a \in int(A)$,
אם קיימת $O \in \tau$ כך ש- $a \in O \subseteq A$.
אזי אומרים גם ש-A סביבה של a,
ומסמנים $A \in N(a)$ (יענו NEIGHBOURHOOD).

הגדרה 10: נקרא למרחב טופולוגי בעל תכונה T_1 אם לכל $a \neq b$ מתקיימים שני התנאים מ-T_0 יחדיו.

טענה: $(X,\tau) \in T_1 \iff$ כל נקודון $\{a\}$ הוא קבוצה סגורה.
רמז: $u=\{b\}^c, \ \ v=\{a\}^c$
תרגיל: $(X,\tau_{cof}) \in T_1$
הסבר:

$\{a\}^c \in \tau_{cof}$
$\Downarrow$
$\{a\}$ IS CLOSED

תרגיל: τ_{cof} היא הטופולוגיה החלשה ביותר על X שהיא בעלת תכונה T_1.

הגדרה 11: נקרא למרחב טופולוגי בעל תכונה T_2 (או תכונת HAUSDORFF) אם לכל $a \neq b$ ב-X קיימות סביבות זרות.

הערה: שקול להגיד "סביבות פתוחות"

דוגמה: $(X,\tau_{cof})\in T_2 \iff X$ סופית

הסבר: אם X סופית אז ברור ש- $\tau_{cof}=\tau_{disct}$, וברור ש- $(X,\tau_{disct})\in T_2$.

אם X אינסופית אז לכל U,V פתוחות ולא ריקות מתקיים $U\cap V\neq\phi$ כי

$$U=F_1^c$$
$$U=F_2^c$$

ואז

$$U\cap V=F_1^c\cap F_2^c=(F_1\cup F_2)^c=\phi$$
$$\Downarrow$$
$$F_1\cup F_2=X$$
$$\Downarrow$$
$$X \text{ is finite!}$$

הגדרה 12: נקרא למרחב טופולוגי בעל תכונה T_3 (או רגולרי) אם $X\in T_1$ לכל a ב-X ולכל קבוצה סגורה B כך ש- $a\notin B$ קיימות סביבות זרות.

זה שקול לכך שקיימות סביבות פתוחות $U\in N(a),V\in N(B)\Rightarrow U\cap V=\phi$

$$TOP\supset T_0\supset T_1\supset T_2\supset T_3\supset \text{Metriz}$$

הסבר: $T_3\supset\text{Metriz}$

נניח $(X,\tau)\in\text{Metriz}$. צ"ל $(X,\tau)\in T_3$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\exists d\ top(d)=\tau}$$

ברור שכל נקודה במ"מ היא קבוצה סגורה ולכן $(X,\tau)\in T_1$ (למשל בגלל תכונת Hausdorff במ"מ מתקיים שמ"מ הוא בעל תכונה T_2)

נניח ש-B היא קבוצה סגורה כך ש-$a\notin B$.

אזי

$$a\notin B=cl(B)=\{x\in X|d(x,B)=0\}$$

ולכן

$$d(a,B)=r>0,\ \epsilon=\tfrac{r}{3},\ B_{\frac{r}{3}}(a)\cap B_{\frac{r}{3}}(B)=\phi$$

דרך אחרת:

נגדיר פונקציה $f_B:X\to\mathbb{R},\ f_B(x)=d(x,B),\ f_B^{-1}(0)=B,f_B(a)=r>0$

הגדרה 13: (התכנסות סדרות)

נניח $\mathbb{N}\to^f X,\ f(n)=x_n$

סדרה ב- X נקראת מתכנסת ל- $a\in X$ אם מתקיים:

$$\forall U\in N(a)\,\exists n_U\in\mathbb{N}:\ \forall n\geq n_U,\ \ x_n\in U$$

נסמן: $a=\lim_{n\to\infty}x_n,\ \ x_n\to^\tau a$

טענה: נניח $(X,\tau) \in T_2$, אזי לכל סדרה מתכנסת יש גבול יחיד.

הסבר: קיימות $U \in N(a), V \in N(b), U \cap V = \phi$

כך שכמעט כל האיברים נמצאים ב־U וכמעט כל האיברים נמצאים ב־V.

$\forall n \geq \max\{n_U, n_V\}, \quad x_n \in U \cap V = \phi$ בסתירה!

הגדרה 14: (רציפות)

נניח $TOP \ni (Y,\sigma), (X,\tau)$

פונקציה f, $X \to^f Y$, נקראת רציפה בנקודה $a \in X$ אם מתקיים:

$\forall U \in N(f(a)) \, \exists V \in N(a) : \; f(V) \subseteq U$

זה שקול לתנאי:

$\forall U \in N(f(a)) \; : \; f^{-1}(U) \in N(a)$

אומרים ש־f רציפה אם היא רציפה בכל נקודה $a \in X$ ואז נסמן $f \in \mathbf{C}(X,Y)$.

משפט 1: רציפות שומרת על ההתכנסות (של סדרות).

הוכחה: נניח $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ פונקציה רציפה ונניח ש־ $a_n \to^\tau a$.

צ"ל $f(a_n) \to^\sigma f(a)$.

נניח $U \in N(f(a))$, לכן צ"ל שכמעט כל האיברים $f(a_n)$ נמצאים ב־U.

f רציפה ולכן היא בפרט רציפה בנקודה $a \in X$.

לפי הגדרת הרציפות,

$\exists V \in N(a) : \; f(V) \subset U$

נתון $a_n \to^\tau a$.

לכן קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש־ $\forall n \geq n_0, a_n \in V$.

לכן, $\forall n \geq n_0 \; f(a_n) \in f(V) \subset U$

■

טענה: התנאים הבאים שקולים:

1. (X,τ) מ"ט לא קשיר.

2. קיימת פונקציה רציפה ועל $X \to^f \{0,1\} \subset \mathbb{R}$.

הסבר מקוצר: מבוסס על קריטריון רציפות שנוכיח בהמשך.

f רציפה $\iff$ מקור של כל קבוצה פתוחה גם פתוח.

$X_1 \to 0, \; X_1 \to 1 \quad X = X_1 \cup X_2$. אז יש 4 מקרים, $f^{-1}(O)$, $O \subseteq \mathbb{R}$.

הגדרה 15: (תת מרחב)

נניח (X,τ) מ"ט, $\phi \neq Y \subset X$

נגדיר "טופולוגיית תת־מרחב" על Y, τ_Y,

על־ידי $\tau_Y = \{O \cap Y | \; O \in \tau\}$.

$\tau_Y \subseteq P(Y)$.

בדקו ש־ (Y, τ_Y) מ"ט.

<u>תרגיל</u>: יהי (X,d) מ"מ, $\phi \neq Y \subset X$.
הוכיחו ששתי הטופולוגיות הבאות על Y שוות:
$\boxed{top(d_Y) = top(d)_Y}$

2.1 הומיאומורפיזם (Homeomorphism)

זהו בעצם איזומורפיזם (הלו מופשטת 1) בין מרחבים טופולוגיים.
<u>הגדרה 16</u>: $(Y,\sigma) \ \to^f (X,\tau)$ פונקציה בין מ"ט נקראת הומיאומורפיזם אם f חח"ע ועל, והיא וההופכית שלה רציפה.
אם קיימת f שכזו, נסמן $(X,\sigma) \simeq (X,\tau)$.
<u>הערה</u>: רציפות וחח"ע ועל הפונקציה לא מבטיח שההופכית שלה רציפה!
לדוגמה, ניקח 2 טופולוגיות שונות τ, σ על אותה קבוצה X כך ש- $\sigma \subsetneqq \tau$.
אזי פונקצית הזהות $Id : (X,\tau) \to (X,\sigma)$ היא רציפה, חח"ע ועל אך ההפכית לא רציפה (כי המקור של פתוחה לא תמיד פתוחה).
יותר ספציפי:
$Id : (\mathbb{R}, \tau_{disc}) \to (\mathbb{R}, top(d))$.
<u>דוגמה</u>: (גיאומטרית)
$f(t) = cis(2\pi t)$.
$[0,1) \to \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} |\ ||z|| = 1\}$.
אזי הפונקציה ההופכית שוב לא רציפה, בנקודה...

טופולוגיה - הרצאה 6

ליאור פולק

3 באפריל 2016

1 הומיאומורפיזם (Homeomorphism)

זהו בעצם איזומורפיזם בין מרחבים טופולוגיים.

הגדרה 1: $(Y,\sigma) \xrightarrow{f} (X,\tau)$ נקרא הומיאומורפיזם אם מתקיים:

1. f רציפה
2. f חח"ע ועל
3. f^{-1} רציפה

אם קיימת f שכזו, נסמן $(X,\tau) \cong (Y,\sigma)$ (בעצם איזו' ב-$TOP := \{\text{מרחבים מטריים}\}$)

הערה: רציפות וחח"ע ועל הפונקציה לא מבטיח שההופכית רציפה!

ניקח למשל 2 טופולוגיות שונות σ, τ על אותה קבוצה X כך ש-$\sigma \subsetneq \tau$.

אזי פונקציות הזהות $Id : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ רציפה, חח"ע ועל אבל ההופכית לא רציפה! (המקור של פתוחה לא תמיד פתוחה)

יותר ספציפי: $Id : (\mathbb{R}, \tau_{disc}) \to (\mathbb{R}, top(d))$.

טענה: הומיאומורפיזם מקיים: רפלקסיביות, סימטריות וטרנזיטיביות בקטגוריה TOP.

הוכחה:

1. $(X,\tau) \simeq (X,\tau)$ אם ניקח את הזהות;
2. $(X,\tau) \simeq (Y,\sigma) \iff (Y,\sigma) \simeq (X,\tau)$ אם ניקח את הפונקציה f^{-1};
3. $\begin{cases} (X_1,\tau_1) \simeq (X_2,\tau_2) \\ (X_2,\tau_2) \simeq (X_3,\tau_3) \end{cases} \Leftarrow (X_1,\tau_1) \simeq (X_3,\tau_3)$ אם ניקח הרכבה של 2 הפונקציות.

מסקנה: TOP מחולקת למחלקות שקילות.

השאלה- מתי קיימים או לא קיימים הומיאומורפיזמים בין 2 מרחבים שונים?

שאלה קשורה- מתי קיימת פונק' רציפה ועל- $X \xrightarrow{f} Y$?

מה הן התכונות שנשמרות על-ידי תמונה רציפה?

למשל-

- קשירות- ז"א, אין פירוק טופולוגי. שקול- קבוצות סגוחות הן רק הקבוצה הריקה וכל המרחב.
- קומפקטיות- מ"ט נקרא קומפקטי אם לכל כיסוי פתוח שלו יש תת-כיסוי סופי.
- ספרביליות- $x \in sep$ אם קיימת תת קבוצה בת מנייה $A \subseteq X$ וצפופה ($cl(A) = X$).

שאלה: למיין קטעים ב-$\mathbb{R}$ עד כדי הומיאומורפיזם וגם עד כדי קיום פונק' חח"ע ועל.

2 דוגמות של הומיאומורפיזמים

1. כל איזומטריה
2. בכל מ"נ $(E, ||\cdot||)$:

() הזזות (הן איזומטריות)

() כפל בסקלר- $E \to E: M_c \in Lip_{|c|}$ ע"י $c \mapsto cv$ כש-$0 \neq c \in \mathbb{R}$, $M_c^{-1} = M_{c^{-1}}$.

3. <u>חשוב</u> לכל מ"נ $(E, ||\cdot||)$ מתקיים $\boxed{E \simeq B_r(a)}$- כל מ"נ הומיאומורפי לכל כדור פתוח שלו.

<u>הסבר</u>: שלב א'- כל הכדורים הפתוחים- הומיאומורפיים.

מ"ל $B_r(a) \simeq B_1(\mathbf{0})$, ע"י $B_r(a) \simeq B_r(\mathbf{0})$.

נוכיח אפוא $B_r(a) \simeq B_r(\mathbf{0}) \simeq B_1(\mathbf{0})$.

$E \overset{T_a}{\leftarrow} E \overset{M_r}{\leftarrow} E$

$B_r(a) \leftarrow B_r(\mathbf{0}) \leftarrow B_1(\mathbf{0})$ (הימני על-ידי הצמצום של M_r, השמאלי על-ידי הצמצום של T_a).

שלב ב'- כל הכדורים הפתוחים הומיאומורפיים לכל המרחב.

מספיק להוכיח $E \simeq B_1(\mathbf{0})$.

נגדיר $E \xrightarrow{f} B_1(\mathbf{0})$ ע"י $f(v) := \frac{1}{1+||v||} \cdot v \in B_1(\mathbf{0})$.

אזי $f^{-1} : x \mapsto \frac{1}{1+||x||} \cdot x$.

<u>מסקנה</u>: $\mathbb{R} \simeq (-1,1)$, $\mathbb{R}^2 \simeq B_1(\mathbf{0})$ וכך הלאה.

נשים לב ש-$\mathbb{R}$ שלם אבל $(-1,1)$ לא שלם. כלומר- תכונות מטריות לא חייבות להישמר בהומיאומורפיזם!

4. $\forall a < b, c < d: \ [a,b] \simeq [c,d]$ ע"י פונקציה לינארית.
5. $(a,b) \simeq (c,d)$
6. $\mathbb{R} \simeq (-\infty, b) \simeq (a, \infty) \simeq (a,b)$ כפי שהוכחנו ב-3, כל הקטעים הפתוחים (קטע, קרן וכל הישר) הם הומיאומורפיים.

<u>הסבר</u>: $\mathbb{R} \simeq (-1,1)$ או $\mathbb{R} \simeq (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ע"י $\tan$ וההפכית $\arctan$.

כמו-כן: $\mathbb{R} \simeq (0, -\infty)$ ע"י $f(x) = 3^x$ שההפכית היא $f^{-1}(x) = \log_3(x)$.

ע"י הזזות- $\mathbb{R} \simeq (0, \infty)$, וע"י היפוך- $\mathbb{R} \simeq (-\infty, -a)$.

<u>**להשלים!!!!!**</u>

7. האם $(2,5) \overset{?}{\simeq} [0,1)$? קשה להכריע כי אין תכונה טופולוגית פשוטה ששונה בין הקבוצות. שתי הקבוצות לא קומפקטיות וקשירות. נשים לב- $(2,5) \backslash \{c\}$ לא קשיר לכל נקודה c בקטע, ואילו $[0,1) \backslash \{0\}$ קשיר.

לכן, נניח בשלילה שיש הומיאומורפיזם $(2,5) \xrightarrow{f} [0,1)$. נגדיר $c := f(0)$.

אזי $(2,5)c \xrightarrow{f^*} [0,1) \backslash \{0\}$ גם הומיאומורפיזם (צמצום של המקורי), בסתירה לכך ש$(0,1)$ קשיר ואילו $(2,5) \backslash \{c\}$ לא!

בעצם, נשתמש ב-

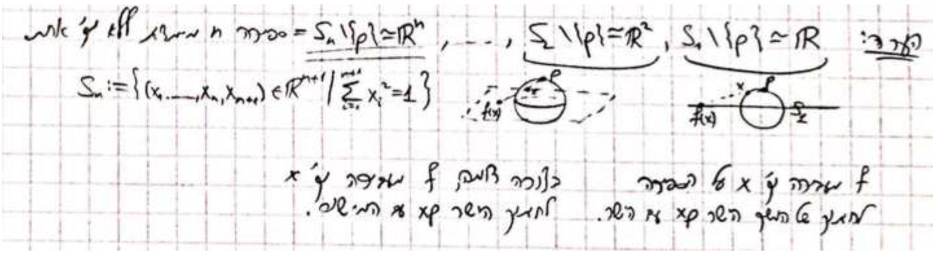
- "צמצום מלא" של הומיאוממורפיזם הוא גם הומיאומורפיזם.
- קשירות נשמרת ע"י תמונה רציפה (ולכן גם ע"י הומיאומורפיזם).

8. $8 \not\simeq 0$ כתתי מרחבים של $\mathbb{R}^2$ (לולאה ומעגל).

בלולאה יש נקודה מחלקת, אבל במעגל אין, כי $(-1,1)\simeq\{c\}\setminus$(מעגל) קשיר לכל (מעגל)$\in c$.

שוב כמו ב–6, נקבל סתירה (הומיאומורפיזם מקשיר ללא קשיר).

<u>הערה</u>: $S_1\setminus\{p\}\simeq\mathbb{R}$, $S_2\setminus\{p\}\simeq\mathbb{R}^2$,..., $S_n\setminus\{p\}\simeq\mathbb{R}^n$= ספירה n–מימדית ללא נקודה אחת.



<u>הגדרה 2</u>: יהי X מ"ט. <u>חבורת ההומיאומורפיזמים</u> מוגדרת ע"י–

$$Homeo(X):=\{f:X\to X|\ f \text{ is a homomorphism}\}\leqslant(S_x,\circ)$$

כך שהפעולה הטבעית $G\times X\to X$ ע"י $(f,x)\to f(x)$,$G:=Homeo(X)$.

אומרים ש–X הוא מרחב <u>הומוגני</u> אם הפעולה היא הומוגנית=טרנזיטיבית, ז"א יש רק מסלול אחד.

<u>תרגילים</u>:

1. $I_S(X)\leqslant Homeo(X)$, כאשר $I_S(X)=\{f:X\to X|\ f \text{ is an isometry}\}$, אם (X,d) מ"מ.
2. האם המרחבים הבאים הומוגניים?
   - $\mathbb{R}^n$
   - S_n
   - $[0,1]$ כמה מסלולים יש בפעולה הנ"ל? שניים– $[0]=[1]=\{0,1\},\ \forall t\in(0,1):\ [t]=(0,1)$
   - $[0,\infty)$

הגדרות: נניח X מ"ט, $A \subseteq X$.

1. a נקראת נקודה פנימית של קבוצה A במ"ט X, אם קיימת קבוצה פתוחה O ב־X $(O \in \tau)$, כך ש־$a \in O \subseteq A$.
נסמן $a \in A^0 = int(A)$, ואומרים ש־$A^0 = int(A)$ הוא הפנים של A.
2. אומרים ש־A סביבה של a אם מתקיים התנאי ב־1, כלומר $a \in int(A)$.
נסמן $A \in N(A)$ (Neighbourhood).
אזהרה- עפ"י ההגדרה הזאת סביבה של a לא בהכרח פתוחה ב־X! (אולי מכילה קבוצה פתוחה O).
3. $\bar{A} = cl(A) := \{z \in X | \forall u \in N(z)\ u \cap A \neq \phi\}$ נקרא הסגור של A (זהו בדיוק התנאי $d(z, A) = 0$ ללא מטריקה.
4. $scl(A) := \{z \in X | \exists a_n \in A : z = \lim a_n\}$ נקרא הסגור הסדרתי של A.
5. תזכורת: $z = \lim a_n$ אם- $\forall u \in N(a)\, \exists n_u \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_u\ : a_n \in u$
6. השפה של A מוגדרת לפי- $\partial(A) := \overline{A} \backslash A^*$

תכונות:

1. $\forall z \in X\ X \in N(z)$
2. חיתוך סופי של סביבות לאותה נקודה הוא גם סביבה לפי התכונה השנייה של טופולוגיה, t_2: $\forall u_1, u_2 \in N(z) :\ u_1 \cap u_2 \in N(z)$
3. $\begin{cases} u \in N(z) \\ u \subseteq v \end{cases} \Leftarrow v \in N(z)$ כלומר- הרחבה של סביבה היא גם סביבה.
4. $\boxed{int(A) \subseteq A \subseteq cl(A)}$
5. $scl(A_1) \subseteq scl(A_2), \overline{A_1} \subseteq \overline{A_2}, A_1^0 \subseteq A_2^0 \Leftarrow A_1 \subseteq A_2$
6. קריטריון לפתיחות- A פתוחה $\iff int(A) = A$

הסבר: $\Leftarrow$ אם A פתוחה אזי לכל $a \in A$ ניקח $O := A$
$\Rightarrow$ $\forall a \in A \exists O_a \in \tau : a \in O_a \subseteq A$. ניקח $\bigcup_{a \in A} O_a = A \in \tau$ כדרוש.

7. $(A^0)^0 = A^0$
8. A^0 פתוחה, לפי 6+7
9. $int(A_1 \cap A_2) = int(A_1) \cap int(A_2)$ ולכל מספר סופי, אבל לא עבור אינסופי
10. $int(A)$ היא הקבוצה הפתוחה הגדולה ביותר שמוכלת ב־A
שקול: $\cup\{O | O \in \tau \wedge O \subseteq A\}$,לפי t_2 והגדרות.
11. הפרשים- לכל O פתוחה ו־F סגורה, $O \backslash F$ פתוחה ו־$F \backslash O$ סגורה.

הסבר:

$O \backslash F = O \cap F^c$, וכן $F \backslash O = F \cap O^c$, ונקבל מיידית את הדרוש.

12. הקשר בין הפנים לסגור:
   א) $cl(A^c) = (int(A))^c$
   ב) $int(A^c) = (cl(A))^c$

הסבר: א $\iff$ ב, לפי המשלים $(A := A^c)$. נוכיח אפוא את א': $(A^0)^c = \overline{A^c}$.

$x \in (A^0)^c \iff x \not\in A^0 \iff \forall u \in N(x) : u \not\subseteq A \iff \forall u \in N(x) : u \cap A^c \neq \phi \iff x \in \overline{A^c}$.

13. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.
14. קריטריון לסגירות: A סגורה $\iff \overline{A} = A$.

15. סגור שומר על איחוד סופי: $\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$ וכן עבור מספר סופי, אבל לא במספר אינסופי!
16. $\overline{A}$ היא הקבוצה הסגורה הקטנה ביותר שמכילה את A.
שקול- $\overline{A} = \cap\{F \subseteq X|\ A \subseteq F \wedge A \text{ is closed}\}$
17. $\partial(A)$ תמיד סגורה, כהפרש של סגורה פחות פתוחה (סגור פחות פנים).
18. $\boxed{\partial(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c}}$, לפי 12
19. $\boxed{\partial(A) := \partial(A^c)}$
20. השפה במ"מ: ב-(X,d), $\partial(A) = \{z \in X|\ d(z,A) = 0, d(z,A^c) = 0\}$
הסבר- במ"מ, $cl(A) = \{z \in X|\ d(z,A) = 0\}$

הגענו לסוף השיעור. איפה התרגיל, אתם שואלים?

<u>תרגיל</u>: נניח $p \notin \mathbb{R}$, $X := \mathbb{R} \cup \{p\}$. נגדיר טופולוגיה σ על X ע"י: $\sigma := \{O \subseteq X|\ p \notin O \vee |O^c| \leq \aleph\}$

הוכח:

1. (X,σ) מ"ט T_2
2. $scl(\mathbb{R}) \neq cl(\mathbb{R})$
3. (x,σ) לא מטריזבילי

תודה לטל קיאני ולליאור רבקין על כתיבת סיכום הרצאה זו, ועל הרשות להשתמש בו

טופולוגיה - הרצאה 7

ליאור פולק

10 באפריל 2016

<u>טענה</u>: $A \subseteq scl(A) \subseteq cl(A)$

<u>הסבר</u>: ההכלה $A \subseteq scl(A)$ מתקבלת מסדרות קבועות.

ההכלה $scl(A) \subseteq cl(A)$ נובעת להלן

$$z \in scl(A) \Rightarrow z = \lim a_n \Rightarrow \forall u \in N(z), \exists n_u \in \mathbb{N} : \ a_n \in u, \forall n \geq n_u$$
$$\Downarrow$$
$$\forall u \in N(z) : \ a_n \in U \cap A \neq \phi$$
$$\Downarrow$$
$$z \in cl(A)$$

<u>הגדרה 1</u>: מ"ט נקרא מרחב–FU (Frechet–Urysohn) אם $\forall A \subseteq X : \ scl(A) = cl(A)$

<u>דוגמה</u>: "מרחב טופולוגי טוב" שהוא <u>לא</u> FU.

בקבוצה $X := \mathbb{R} \cup \{p\} \quad p \notin \mathbb{R}$ נגדיר טופולוגיה

$$\sigma := \{O \subseteq X : \ p \notin O \vee |O^c| \leq \aleph_0\}$$

$(X, \sigma) \in T_2 = \text{Hausdorff}$.

$$\mathbb{R} = scl(\mathbb{R}) \neq cl(\mathbb{R}) = X = \mathbb{R} \cup \{p\}$$

כי $p \in cl(\mathbb{R})$, $\forall u \in N(p) : \ u \cap \mathbb{R} \neq \phi$

$A := \mathbb{R}, \quad \mathbb{R} \subseteq scl(\mathbb{R}) \not\ni p$

כי לכל סדרה $a_n \in \mathbb{R}$ ניקח $\sigma \ni O := X \setminus \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ פתוחה!

$\forall n \quad a_n \notin O \in N(p) \Rightarrow \forall a_n \in \mathbb{R} \ \lim a_n \neq p$

<u>הגדרה 2</u>: מ"ט (X,τ) נקרא בעל תכונת מנייה I ונסמן $x\in B_1$

אם לכל נקודה $a\in X$ קיימת סדרה <u>בת מנייה</u> של סביבות $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\quad u_n\in N(a)$

כך שלכל $V\in N(a)$ קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש-$u_n\subseteq V$.

- $\{u_n\}$ נקרא בסיס מקומי בנקודה a.

<u>טענה</u>: $\text{Metriz}\subset B_1$.

<u>הסבר</u>: אם (X,d) מ"מ אזי לכל $a\in X$ אפשר להגדיר $U_n:=B_{\frac{1}{n}}(a)\quad n\in\mathbb{N}$.

<u>הסבר</u>: הגדרות רלוונטיות במ"מ.

<u>דוגמה</u>: (מרחב Sorgenfrey)

בקבוצה $X:=\mathbb{R}$ נגדיר

$$\tau_s:=\{O\subseteq\mathbb{R}:\ x\in O\Rightarrow\exists\epsilon>0:[x,x+\epsilon)\subseteq O\}$$

בדקו ש-$(\mathbb{R},\tau_s)\in T_3$.

$[a,b)\in\tau_s\quad\forall a<b$, $\bigcup_{t\in(a,b)}[t,b)=(a,b)\underset{t_3}{\in}\tau_s$

<u>מסקנה</u>: $\tau=top(d)\subsetneqq\tau_s$.

- נוכיח בהמשך ש-$\text{Metriz}\notin(\mathbb{R},\tau_s)$, $(\mathbb{R},\tau_s)\in B_1$ לפי כך שלכל $a\in\mathbb{R}$ נגדיר $U_n:=[a,a+\frac{1}{n})\quad n\in\mathbb{N}$ ואז $\gamma:\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ בסיס מקומי בן־מנייה בנקודה a ב-$(\mathbb{R},\tau_s)$.

<u>טענה</u>: נניח $X\in B_1$. אזי לכל $a\in X$ קיים בסיס מקומי ב-a, $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, כך ש- $\ldots\supseteq U_n\supseteq U_{n+1}\supseteq\ldots$

<u>הסבר</u>: לפי הגדרת B_1 קיים בסיס מקומי ב-a, $\gamma:=\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- בסיס מקומי ב-a זה אוסף γ של סביבות $\gamma\subseteq N(a)$ כך שלכל סביבה $O\in N(a)$ קיים $V\in\gamma$: $V\subseteq O$.

נתקן את γ:

$$\begin{gathered}U_1:=V_1\\ U_2:=V_1\cap V_2\\ \vdots\\ N(a)\ni U_n:=V_1\cap V_2\ldots\cap V_n\end{gathered}$$

נקבל:

$$N(a)\ni\gamma':=\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

כאשר γ' בסיס מקומי בן-מנייה, וגם $U_n\supseteq U_{n+1}$.

<u>הגדרה 3</u>: (רציפות)

לכל פונקציה בין מ"ט, $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$, התנאים הבאים שקולים:

1. f רציפה
2. מקור של קבוצה פתוחה גם פתוח
3. מקור של קבוצה סגורה גם סגור
4. $z\in cl(A)\Rightarrow f(z)\in cl(f(A))$ ששקול ל4', $f(cl(A))\subseteq cl(f(A))$

<u>הוכחה</u>:

<u>$1 \Leftarrow 2$</u>

נניח $O\in\sigma$ צ"ל $f^{-1}(O)\in\tau$.

שקול להוכיח- $f^{-1}(O)$ סביבה לכל נקודה שלה, קריטריון לפתיחות.

לכל $a\in f^{-1}(O)$ הפונקציה f רציפה בנקודה $a\in X$, וגם $f(a)\in O\in\sigma$ ולכן $O\in N(f(a))$.

לפי הגדרת הרציפות בנקודה a המקור של סביבה גם סביבה ומכאן $f^{-1}(O)\in N(a)$, אזי $f^{-1}(O)\in\tau$עפ"י הקריטריון!

<u>$2 \Leftarrow 3$</u>

מיידי לפי השלמים

<u>$3 \Leftarrow 4'$</u>

$$A \underset{\forall A\subseteq X}{\subseteq} f^{-1}(f(A)) \underset{A\subseteq cl(A)}{\subseteq} f^{-1}(cl(f(A)))$$

$$cl(A) \underset{\substack{K_1\subseteq K_2\\ \Rightarrow cl(K_1)\subseteq cl(K_2)}}{\subseteq} cl(f^{-1}(cl(f(A)))) \underset{*}{=} f^{-1}(cl(f(A)))$$

* לפי כך ש

1. $cl(f(A))$ קבוצה סגורה
2. נתון 3 $\Leftarrow$ $f^{-1}(cl(f(A)))$ גם סגורה
3. קריטריון לסגירות K סגורה $\iff cl(A)=A$

$$f(cl(A))\subseteq ff^{-1}(cl(f(A)))\subseteq cl(f(A))$$

וקיבלנו את '4.

<u>$4 \Leftarrow 1$</u>

נניח בשלילה ש-1 לא מתקיים. אזי יש נקודה $a\in X$ כך ש-f <u>לא</u> רציפה ב-a.

אזי קיימת סביבה פתוחה U של $f(a)$ ב-Y כך ש- $f^{-1}(U)\notin N(a)$.

זה שקול ל- $a\notin int\ f^{-1}(U)$.

זה שקול ל- $a\in(int\ f^{-1}(U))^c$.

$\Leftarrow a\in cl((f^{-1}(U))^c)$

לפי 4 נקבל $f(a)\in cl(f(f^{-1}(U)))\subseteq cl(f(X\backslash f^{-1}(U)))\subseteq cl(Y\backslash U)=Y\backslash U$

U פתוחה ואז $Y\backslash U$ סגורה, אבל נתון ש-U סביבה של $f(a)\in U$ בסתירה ל$f(a)\in Y\backslash U$ כלומר $f(a)\in U^c$).

■

משפט 1: ($\frac{1}{2}$ Heine)

כל פונקציה רציפה $f: X \to Y$ שומרת על התכנסות, דהיינו $a_n \xrightarrow{X} z \Rightarrow f(a_n) \xrightarrow{Y} f(z)$.

הוכחה: צ"ל שלכל סביבה $U \in N(f(z))$ יש $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש- $\forall n > n_0,\ f(a_n) \in U$.

בגלל הרציפות של f בנקודה $z \in X$ המקור $f^{-1}(U) \in N(z)$.

נתון $a_n \xrightarrow{X} z$ ולכן קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש $a_n \in f^{-1}(U)$ ומכאן $\forall n > n_0:\ f(a_n) \in U$.

■

הגדרה 4: (עקרון Heine במ"ט)

נניח $X \xrightarrow{f} Y$ בין מ"ט. ונניח גם $scl(A) = cl(A) \quad \forall A \subseteq X$ ששקול ל-$X \in FU$.

אזי התנאים הבאים שקולים:

1. f רציפה
2. $a_n \to z \Rightarrow f(a_n) \to f(z)$

הוכחה:

$2 \Leftarrow 1$

תמיד! בגלל $\frac{1}{2}$ Heine.

$1 \Leftarrow 2$

שקול להוכיח $f(cl(A)) \subseteq cl(f(A))$ (לפי $4 \Leftarrow 1$ במשפט הרציפות)

לפי ההנחה $X \in FU$ ומ"ל $f(scl(A)) \subseteq cl(f(A))$.

מ"ל $f(scl(A)) \subseteq scl(f(A))$ (כי תמיד $scl(K) \subseteq cl(K)$)

מ"ל $z \in scl(A) \Rightarrow f(z) \in scl(f(A))$. זה שקול להוכיח $a_n \to z \Rightarrow f(a_n) \in f(z)$. אבל זה נכון בגלל הנחה 2.

■

טענה: $B_1 \in FU$

הסבר: נניח $(X, \tau) \in B_1$

צ"ל $scl(A) = cl(A) \quad \forall A \subseteq X:$. מ"ל את ההכלה $scl(A) \supseteq cl(A)$.

יהי $z \in cl(A)$. נתון $x \in B_1$ ועפ"י הטענה שהוכחנו קיים בסיס מקומי בנקודה z, $\gamma := \{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, שהוא בן מנייה ומונוטוני ($U_n \supseteq U_{n+1}$).

צ"ל $z \in scl(A)$ דהיינו $\exists a_n \in A:\ z = \lim a_n$.

לכל $U_n \in \gamma$ מתקיים $U_n \cap A \neq \phi$ מכיוון ש- $z \in cl(A)$. נבחר $a_n \in U_n \cap A$, מ"ל $\lim a_n = z$.

צ"ל $\forall O \in N(z) \exists n_0 \in \mathbb{N}: a_n \in O,\ \forall n \geq n_0$.

לפי הגדרת בסיס מקומי עבור O קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש-$U_{n_0} \subseteq O$

ובגלל המונוטוניות

$$\begin{array}{c} \underset{a_{n_0}}{U_{n_0}} \supseteq \underset{a_{n_0+1}}{U_{n_0+1}} \supseteq \underset{a_{n_0+2}}{U_{n_0+2}} \supseteq \dots \\ \forall n \geq n_0:\ a_n \in U_{n_0} \subseteq O \Leftarrow \end{array}$$

■

מסקנה: לכל פונקציה $(\mathbb{R}, \tau_s) \xrightarrow{f} (Y, \sigma)$ מתקיים עקרון Heine.

<u>טענה</u>: נניח τ_1, τ_2 טופולוגיות על אותה קבוצה X. נגדיר:

$$(X,\tau_1) \overset{f=id}{\to} (X,\tau_2)$$

אזי f רציפה $\iff$ $\tau_1 \subseteq \tau_2$

<u>הסבר</u>: שימוש במשפט הרציפות- מקור לפתוחה הוא גם פתוח. לקחת בחשבון ש-$id^{-1}(O) = O$.

<u>דוגמה</u>: פונקציה שעבורה לא מתקיים עקרון Heine.

<u>הערה</u>: $\text{Metriz} \subseteq B_1 \subseteq FU$.

לכן צריך למצוא דוגמה כאשר תחום ההגדרה $(\text{Metriz} \not\supseteq) B_1 \not\supseteq X$.

ניקח את הדוגמה של $X = \mathbb{R} \cup \{p\}$ מתחילת ההרצאה.

$$\sigma := \{O \subseteq X : \ p \notin O \vee |O^c| \leq \aleph_0\}$$

אזי $scl(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \neq cl(\mathbb{R}) = X$.

נגדיר

$$(X,\sigma) \overset{f=id}{\to} (X,\tau_{disc})$$

- f שומרת על התכנסות (בשני המקרים יש התכנסות טריוויאלית בלבד!)
- f לא רציפה!

אחרת (בגלל הטענה הקודמת) היינו מקבלים ש-$\tau_{disc} = \sigma \Leftarrow \tau_{disc} \subseteq \sigma$ בסתירה!

<u>הערה</u>: "סדרות רגילות" לא מספיקות כדי לתאר את הטופולוגיה וגם את הרציפות, אבל "סדרות מוכללות" כן מאפשרות.

סדרה מוכללת- $(S,\leq) \overset{f}{\to} X$ קבוצה סדורה (באמצעות אינטגרל, לא ניתן לתאר דרך סדרות רגילות).

<u>ספרות</u>: האוניברסיטה הפתוחה, ד.ליבוביץ, טופולוגיה קבוצתית.

Seminars→Background

<u>תכונות רציפות</u>:

1. כל פונקציה

$$f:(X,\tau_{disc}) \to Y, \quad f: Y \to (X,\tau_{tr})$$

רציפה תמיד.

<u>הסבר</u>: קריטריון רציפות 2.

2. הרכבה של פונקציות רציפות (או הומיאומורפיזמים) גם רציפה (או הומיאומורפיזם)
3. לכל מ"ט X,

$$C(X) = C(X,\mathbb{R})$$

תמיד חוג (סגור לכפל וחיבור)

ולכל $f,g \in C(X)$, $C(X) \ni h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$.

טופולוגיה – הרצאה 8

ליאור פולק

1 במאי 2016

<u>הגדרה 1</u>: נניח (X,τ) מ"ט. $A \subseteq X$ נקראת **צפופה** (ב–X) אם מתקיים $cl(A) = X$. הדבר שקול לדרישה $\forall O \neq \phi \in \tau:\ O \cap A \neq \phi$.

<u>הגדרה 2</u>: אומרים ש–X הוא מרחב **ספרבילי** (separable) אם קיימת קבוצה צפופה A שהיא בת מנייה, $|A| \leq \aleph_0$.

<u>דוגמות</u>:

1. $\mathbb{R}^n \in \text{Sep}$, כי למשל $cl(\mathbb{Q}^n) = \mathbb{R}^n$
2. $cl(X) = X$. לכן אם $|X| \leq \aleph_0$ ברור ש–$X \in \text{Sep}$.
3. $\forall X:\ (X, \tau_{cof}) \in \text{Sep}$. הסבר: תהי $\phi \neq O \in \tau_{cof}$. אזי נגדיר $F^c := O$ ואז F סופית. לכל $A \subseteq X$ בת–מנייה סופית מתקיים $cl(A) = X$ (ברור אם X סופית לפי 2).
[$cl(A) = X$ כי X היא הסגורה היחידה המכילה את A– קבוצה סגורה ב–τ_{cof} היא סופית]
4. $\forall X:\ (X, \tau_{trivial}) \in \text{Sep}$. הסבר: כל תת קבוצה לא ריקה היא צפופה ולכן $cl(a) = X$.
5. $\ell_2 \in \text{Sep}$. הסבר מקוצר: צריך למצוא ת"ק כך ש $\bar{A} = \ell_2, |A| \leq \aleph_0$. ניקח $\ell_2 \ni A := \{(q_1, \ldots, q_k, 0, 0, \ldots):\ q_i \in \mathbb{Q}\}$. אזי (בדקו!) $\bar{A} = \ell_2 \wedge |A| = \aleph_0$.
6. $(C[a,b], d_{\max}) \in \text{Sep}$. זה נובע ממשפט ויירשטראס. עוד עובדה מעניינת (יעני העשרה)– $P_{\mathbb{Q}}[a,b] := \{\text{All the continuous polynomials in [a,b]}\}$, $cl(P_{\mathbb{Q}}[a,b]) = C[a,b]$ שהיא בת מנייה, ולכן זה ספרבילי.
7. אם (X,d) מ"מ, אזי A צפופה במ"ט $(X, top(d))$ $\iff$ A ϵ–צפופה ב–X לכל $\epsilon > 0$.

<u>הגדרה 3</u>: $A \subset (X,d)$ נקראת ϵ**–צפופה** אם

$$\boxed{\forall x \in X\ \exists a \in A:\quad d(x,a) < \epsilon \iff X = \bigcup_{a \in A} B_\epsilon(a) = X}$$

זה אומר שניתן לכסות את X ע"י איחוד כדורים פתוחים ברדיוס ϵ סביב איברי A.

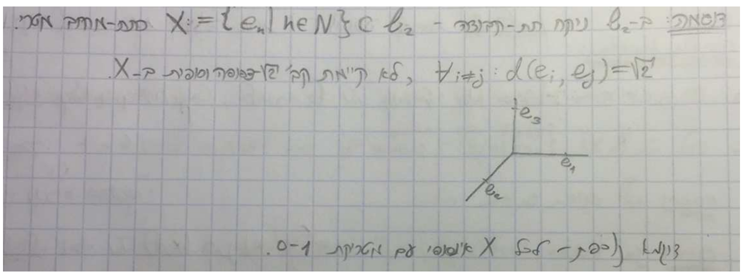
<u>הגדרה 4</u>: מ"מ (X,d) נקרא **חסום כליל** (Totally Bounded) אם לכל $\epsilon > 0$ (לכל $\epsilon = \frac{1}{n}$) קיימת תת–קבוצה $A_\epsilon \subseteq X$ כך ש:

1. A_ϵ ϵ–צפופה ב–X.
2. A_ϵ סופית.

<u>תרגיל</u>: הוכיחו שכל מ"מ חסום כליל (ח"כ) הוא מרחב חסום. רמז: אי שיוויון המשולש (אקסיומת המטריקה השלישית).

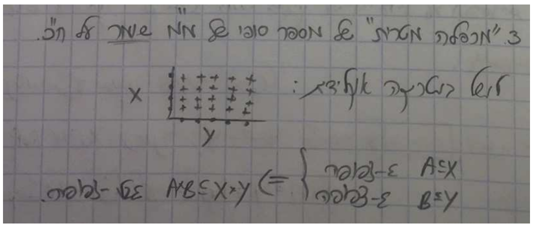
<u>תרגיל</u>: קיים מ"מ חסום שהוא לא ח"כ.

<u>למשל</u>: ב־ℓ_2 ניקח תת קבוצה $X := \{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \ell_2$ כתת מרחב מטרי. אז אין תת קבוצה $\sqrt{2}$–צפופה סופית ב–X.



<u>דוגמה אחרת</u>: לכל X אינסופי עם מטריקת 0–1.

0.1 תכונות של ח"כ

1. כל ח"כ הוא חסום
2. ב-$\mathbb{R}$ כל חסום הוא ח"כ
3. "מכפלה מטרית" של מספר סופי של מ"מ שומר על ח"כ
4. 

5. כל תת מרחב במטרי במרחב ח"כ גם הוא ח"כ (רמז- האקסיומה השלישית של המטריקה)
6. ב-$\mathbb{R}^n$ כל חסום הוא ח"כ
7. משפט 1: כל ח"כ הוא ספרבילי

הוכחה: (X,d) ח"כ. אזי לכל $n\in\mathbb{N}$ קיימת תת קבוצה סופית $A_n\subseteq X$ שהיא $\frac{1}{n}$-צפופה.

לכן $A=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}A_n$ בת-מנייה, A_ϵ צפופה לכל $\epsilon>0$. מכאן A צפופה במ"ט X, ו-$X\in\text{Sep}$.

8. משפט 2: נניח (X,d) מ"מ קומפקטי. אזי הוא ח"כ.

מסקנה: $\text{Comp}\cap\text{Metr}\subset\text{Totally Bounded}$

הוכחה: לכל $\epsilon>0$ נגדיר כיסוי פתוח שנקרא ϵ-כיסוי,

$$\{B_\epsilon(x)|x\in X\},\quad \bigcup_{x\in X}B_\epsilon(x)=X$$

אבל X קומפקטי ולכן קיים לו תת-כיסוי סופי.

ז"א קיימת תת-קבוצה $A_\epsilon=\{a_1,\dots,a_m\}\subset X$ כך ש-$X=\bigcup\limits_{k=1}^{m}B_\epsilon(a_k)$ לכל $\epsilon>0$.

מכאן נובע ש-(X,d) ח"כ

■

הערה: לעתים ת"ק סופית שהיא ϵ-צפופה נקראת **ϵ-רשת**

מסקנה: $\text{Comp}\cap\text{Metr}\subset\text{Sep}$

9. תוצאה: כל מרחב מטרי קומפקטי הוא ספרבילית (מ-6 ו-7)

הערה: נוכיח בהמשך שמ"מ (שעבור הטופולוגיה שמושרית מהמטריקה שלו) קומפקטי $\iff$ הוא שלם וח"כ. את הכיוון קומפקטי $\Leftarrow$ שלם וח"כ הוכחנו!

משפט 3: Sep נשמרת ע"י תמונה רציפה (במ"ט)

הוכחה: נניח $X,Y\in TOP$. נתונה $X\overset{f}{\to}Y$ שהיא רציפה ועל, ו-$X\in\text{Sep}$. צ"ל גם $f(X)=Y\in\text{Sep}$.

X ספרבילי ולכן יש $A\subseteq X$ כך ש $|A|\le\aleph_0$ וגם $cl(A)=X$. אזי $f(A)\subseteq f(X)=Y$.

ברור ש $|f(A)|\le\aleph_0$ ולכן מ"ל ש $f(A)$ צפופה ב-Y.

צ"ל $cl(f(A))=Y$.

תזכורת: f רציפה $\iff$ $f(cl(A))\subseteq cl(f(A))$. נשתמש עבור A ונקבל $f(cl(A))=f(X)=Y$ כי $cl(A)=X$. מכאן $Y=f(cl(A))\subseteq cl(f(A))=Y$ ונקבל $cl(f(A))=Y$ ומש"ל.

■

הגדרה 5: (בסיס לטופולוגיה) bases

נניח (X,τ) מ"ט, $\gamma \subset P(X)$. אומרים ש-γ היא **בסיס לטופולוגיה** τ אם:

1. $\gamma \subseteq \tau$.
2. כל קבוצה פתוחה $O \in \tau$ אפשר להציג כאיחוד דרך איברים מ-γ.

שקול להגיד: $\gamma^U = \tau$, כאשר $\gamma^U = \{\text{Unions via members of } \gamma\}$.

הגדרה 6: $x \in B_2$ אם קיים בסיס לטופולוגיה γ שהוא **בן מנייה**. **(תכונת מנייה 2)**

0.2 דוגמות ותכונות

1. τ תמיד בסיס ל-τ.
2. בכל מ"מ (X,d), $\gamma := \{\text{Open balls}\} = \{B_\epsilon(x) : x \in X,\, \epsilon > 0\}$ הוא בסיס לטופולוגיה $top(d)$.
הסבר: בגלל הגדרת פתיחות במ"מ

$\gamma_1 = \left\{B_{\frac{1}{n}}(x) | x \in X,\, n \in \mathbb{N}\right\}$ גם בסיס.

3. טענה: נניח A צפופה במ"מ (X,d). אזי:

$$\gamma_A = \left\{B_{\frac{1}{n}}(a) | a \in A,\, n \in \mathbb{N}\right\}$$

הוא בסיס בן-מנייה לטופולוגיה $top(d)$. בדקו תוך שימוש באקסיומה השלישית של המטריקה.

4. $\text{Metr} \cap \text{Sep} \subseteq B_2$

תזכורת: $\alpha \subset P(X)$ נקרא **בסיס מקומי** (לוקלי) בנקודה $z \in X$ אם:

1. $\alpha \subset N(z)$
2. $\forall u \in N(z)\, \exists V \in \alpha :\ V \subseteq U$

הגדרה 7: $X \in B_1$ אם לכל $z \in X$ קיים בסיס מקומי α שהוא **בן-מנייה**. **(תכונת מנייה 1).** נשים לב כי $\text{Metriz}\subset B_1$.

5. טענה: $B_2 \subset B_1$

הוכחה: נתון $(X,\tau) \in B_2$. צ"ל $(X,\tau) \in B_1$. זה אומר שקיים בסיס לטופולוגיה בן-מנייה γ, $\gamma^U = \tau$.
נגדיר $\gamma_z := \{O \in \gamma | z \in O\} \subseteq \gamma$. ברור כי γ_z בן-מנייה. לכן מ"ל ש-γ_z בסיס מקומי בנקודה z.
כל איבר $O \in \gamma_z$ הוא קבוצה פתוחה שמכילה את z. ברור כי $O \in N(z)$. קיבלנו אפוא $\gamma_z \subseteq N(z)$.
מתקיימת אקסיומת הבסיס המקומי הראשונה!
נבדוק עבור האקסיומה השנייה- מ"ל עבור $U \in N(z) \cap \tau$ (דהיינו, עבור סביבות פתוחות).
לפי $U \in \tau = \gamma^U$ נובע $v_i \in \gamma$, $U = \bigcup\limits_{i\in I} v_i$ לפי הגדרת הבסיס.
קיים $v_{i_0} \in \gamma$ כך ש $z \in v_{i_0}$. לכן נבחר $v = v_{i_0}$ ומש"ל.

■

6. נתון (X, τ_{disc}) מרחב דיסקרטי. אזי הוא בעל תכונת מנייה 2 $\iff$ X בת-מנייה.

הסבר: דיסקרטיות שקולה לעובדה שכל נקודה מבודדת. לכן לכל בסיס γ של τ_{disc} מתקיים:

$$\gamma \supset \{\{x\} | x \in X\} \Rightarrow |\gamma| \geq |X|$$

מכאן נובע שאם $(X,\tau_{disc}) \in B_2$ אזי $|X| \leq \aleph_0$.
מצד שני, אם X בת-מנייה ו-X דיסקרטי אזי $\gamma := \{\{x\} | x \in X\}$ היא בסיס ל-τ_{disc} ובת-מנייה. מש"ל.

■

דוגמה נגדית: $B_1 \subsetneqq B_2$. ניקח $X := (\mathbb{R}, \tau_{disc}) \in B_1$ (כי כל מרחב דיסקרטי הוא B_1).
$X \notin B_2$ (בגלל טענה 6).

טופולוגיה – הרצאה 9

ליאור פולק

8 במאי 2016

<u>טענה 1</u>: נניח (X,τ) מ"ט, $\gamma \subseteq \tau$. אזי התנאים הבאים שקולים:

1. γ בסיס ל-τ (ז"א $\tau = \gamma^U$)
2. $\forall O \in \tau \, \forall x \in O \quad \exists U \in \gamma : \ x \in U \subseteq O$

<u>הסבר</u>: $1 \Leftarrow 2$ נובע מההגדרה!

$1 \Rightarrow 2$ $\exists U_x \in \gamma, x \in U_x \quad \gamma^U \ni O = \bigcup_{x \in O} U_x,$

<u>דוגמה</u>: לכל מ"מ (X,d), $\{B_r(x) | x \in X, r > 0\}$ בסיס ל-$top(d)$.

<u>טענה 2</u>: $B_2 \in \mathrm{Sep}$

<u>הסבר</u>: נניח $(X,\tau) \in B_2$. אזי קיים בסיס γ בן-מנייה, $\gamma = \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

בה"כ $U_n \neq \phi \quad \forall n$, וניקח $a_n \in U_n$.

נגדיר $A := \{a_n | n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$ שהיא בת-מנייה. מ"ל $\bar{A} = X$.

שקול להוכיח: $\forall O \neq \phi \in \tau : \quad O \cap A \neq \phi$

לכן ניקח $U_{n_0} \in \gamma$ (מכך ש $O \in \gamma^U = \tau$, קיים n_0 שכזה). $U_{n_0} \subset O$.

לפי הבנייה, $a_{n_0} \in U_{n_0}$. לכן גם $a_{n_0} \in O \cap A \neq \phi$.

■

<u>טענה 3</u>: במרחבים מטריזביליים, ספרביליות ותכונת מנייה שנייה הן שקולות, דהיינו

$$B_2 \cap \mathrm{Metriz} = \mathrm{Sep} \cap \mathrm{Metriz}$$

<u>הסבר</u>: $\subseteq$: נובע ישר מטענה 2.

$\supseteq$: השתמשו בתרגיל הבא (בדקו!)

לכל $\bar{A} = X$ האוסף הבא $\gamma_A := \left\{ B_{\frac{1}{n}}(a) | a \in A \right\}$ בסיס ל-$(X, top(d))$ (לפי האקסיומה השלישית של מטריקה). ברור שאם A בת-מנייה אזי גם γ_A.

טענה 4:

1. B_2 תורשתית (תמיד)
2. (דוגמה נגדית) Sep לא תורשתית
3. Sep תורשתית במ"מ

הוכחה:

1. נניח $(X,\tau)\in B_2$. צ"ל $(Y,\tau_Y)\in B_2$ לכל $\phi\neq Y\subseteq X$, כאשר $\tau_Y:=\{O\cap Y|O\in\tau\}$.
$\gamma=\{U_n\}$ בסיס ל-τ. אזי $\gamma_Y=:\{U_n\cap Y\}$ בסיס ל-τ_Y (למשל אפשר לבדוק דרך טענה 1).
2. נגדיר $X:=\mathbb{R}\cup\{p\}$ כאשר $p\notin\mathbb{R}$. נגדיר $T_2\ni\tau:=\{O\subseteq X|p\notin O\vee|O^c|<\infty\}$

כאן $(\mathbb{R},\tau_{\mathbb{R}})$ דיסקרטי (כל ת"ק פתוחה), ולכן הוא לא ספרבילי! נשים לב ש-$(X,\tau)\in \mathrm{Sep}$, כי $X=\overline{\{p\}\cup\mathbb{Z}}$. **אבל זאת טעות שכן $\{p\}\cup\mathbb{Z}$ בעצמה קבוצה סגורה שכן המשלימה שלה שלא מכילה את p נמצאת בטופולוגיה! כאן יבוא טיכון...**

טיכון: $p\notin\mathbb{R}$, $X:=\mathbb{R}\cup\{p\}$, $\mathrm{TOP}\ni\tau:=\{O\subseteq X|p\in O\}\cup\{\phi\}$

$\mathrm{Sep}\notin(\mathbb{R},\tau_{\mathbb{R}})$ דיסקרטי וגם $\mathbb{R}$ לא בן-מנייה. $(X,\tau)\in\mathrm{Sep}$ כי $\bar{A}=X$, $A:=\{p\}$.

3. נובע מ1 ומטענה 3.

■

טענה 5: $\ell_\infty\notin\mathrm{Sep}$ (מרחב בנך לא ספרבילי)

הסבר: תזכורת- $\ell_\infty:=\{\text{Bounded Series}\}$, $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\|x\|=\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}|x_n|$

בגלל סעיף 3 בטענה 4 מ"ל שקיים ת"מ לא ספרבילי. נסתכל על הסדרות הבינאריות

$$Y:=\{0,1\}^{\mathbb{N}}\subseteq\ell_\infty$$

שהוא ת"מ דיסקרטי (כל נקודה ב-Y מבודדת ב-Y). $|Y|=2^{\aleph_0}$. לכן Y לא ספרבילי.

■

0.1 תכונות נוספות של הישר של סורגנפריי, $(\mathbb{R},\tau_s)$

תזכורת:

$$\tau_s=\{O\subseteq\mathbb{R}|x\in O\ \exists y\in\mathbb{R}:[x,y)\subseteq O\}$$

1. $X\in\text{Sep}$ ($\bar{\mathbb{Q}}=X$)
2. $X\in B_1$ כי לכל נקודה ניתן לקחת $\gamma_x:=[x,x+\frac{1}{n}]$ שיהיה בסיס לוקאלי בנקודה x למרחב זה
3. $\gamma:=\{[x,y)|x<y,\ x,y\in\mathbb{R}\}$ בסיס לטופולוגיה τ_s
4. $X\notin B_2$

<u>הסבר</u>: נניח γ בסיס לטופולוגיה τ_s. הרעיון הוא להוכיח ש-$\|\mathbb{R}\|\leq|\gamma|$. נשתמש בטענה 1:

לכל x ניקח $O:=[x,x+1)\in\tau_s$ שהיא פתוחה. לפי טענה 1, קיים $U_x\in\gamma$ כך ש-$x\in U_x\subseteq O$. נבחר אחד כזה לכל $x\in\mathbb{R}$.
נקבל פונקציה $\gamma\overset{\varphi}{\to}\mathbb{R}$, $x\mapsto U_x$.

הפונקציה φ היא חח"ע כי לכל $x<y$ מתקיים $x\not\ni U_y\neq U_x\ni x$.

φ חח"ע $\Leftarrow\|\mathbb{R}\|\leq|\gamma|\Leftarrow\aleph_0<|\gamma|$

■

5. $X\notin\text{Metriz}$

<u>הסבר</u>: מסעיפים 1 ו-5 וטענה 3

<u>הגדרה 1</u>: מ"ט נקרא **בעל מימד 0** ונסמן $\dim X=0$ אם $X\in T_1$ וקיים בסיס לטופולוגיה γ כך שכל $u\in\gamma$ היא קבוצה סגוחה.

למשל:

1. כל קבוצה עם מטריקת 0-1
2. כל מרחב דיסקרטי
3. $\mathbb{Q},\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ (הסבר ל$\mathbb{Q}$: אפשר לקחת חיתוכים $(a,b)\cap\mathbb{Q}$ כך ש- $a,b\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. אוסף זה הוא בסיס לטופולוגיה ב-$\mathbb{Q}$. הסבר ל$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$: אפשר לקחת חיתוכים $(a,b)\cap\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ כך ש- $a,b\in\mathbb{Q}$. אוסף זה הוא בסיס לטופולוגיה ב-$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.)
4. $X=(\mathbb{R},\tau_s)$ (הסבר: ברור ש-$X\in T_2$. לכן מתקיים א. ניקח בסיס סטנדרטי: $\gamma=\{[x,y)|x<y\}\subset\tau_s$ שהקבוצות בו סגוחות שכן $[x,y)^c=(-\infty,x)\cup[y,\infty)$ פתוחות ב-τ_s)

<u>הערה</u>: בהמשך נוכיח שמישור סורגנפריי הוא ספרבילי, אבל מכיל ת"מ טופולוגי לא ספרבילי.

1 מכפלה טופולוגית

נתחיל בשני גורמים.

$\text{TOP} \ni (X_1,\tau_1),(X_2,\tau_2)$

מהי הטופולוגיה הטבעית מעל $X := X_1 \times X_2$?

$$\tau := \{O \subseteq X_1 \times X_2 | \forall (x_1,x_2) \in O\, \exists (x_1 \in) U_1 \in \tau_1,\, (x_2 \in) U_2 \in \tau_2 : \quad U_1 \times U_2 \subseteq O\}$$

<u>תכונות</u>:

1. $(X_1 \times X_2, \tau) \in \text{TOP}$
2. פונקציות ההטלה לכל רכיב הן רציפות (בדקו!), $X_1 \times X_2 \begin{array}{l} \overset{\pi_1}{\to} X_1 \\ \overset{\pi_2}{\to} X_2 \end{array}$
3. $\gamma := \{\text{Open Rectangles}\} = \{U_1 \times U_2 | U_1 \in \tau_1, U_2 \in \tau_2\}$ היא בסיס ל-τ (<u>הערה</u>: לכל הבסיסים γ_i של τ_i, $i = 1,2$, $\gamma_1 \times \gamma_2 := \{U_1 \times U_2 | U_i \in \tau_i\}$ בסיס ל-τ)

באופן דומה מגדירים מכפלה טופולוגית (באינדוקציה, אלא מה):

$$X := X_1 \times X_2 \ldots \times X_n, \quad \gamma_\square^U = \text{Base to } \tau, \quad \gamma_\square := \left\{ \prod_{i=1}^n U_i | U_i \in \tau_i \right\} = \{\text{Open Boxes}\}$$

למספר סופי של גורמים (הריבוע הריק בכוונה).

<u>אזהרה</u>: למספר אינסופי של גורמים ההגדרה היא קצת שונה.

<u>הערה</u>: $X_i \in B_2$, $i = 1 \ldots n$ אזי $\prod_{i=1}^n X_i \in B_2$

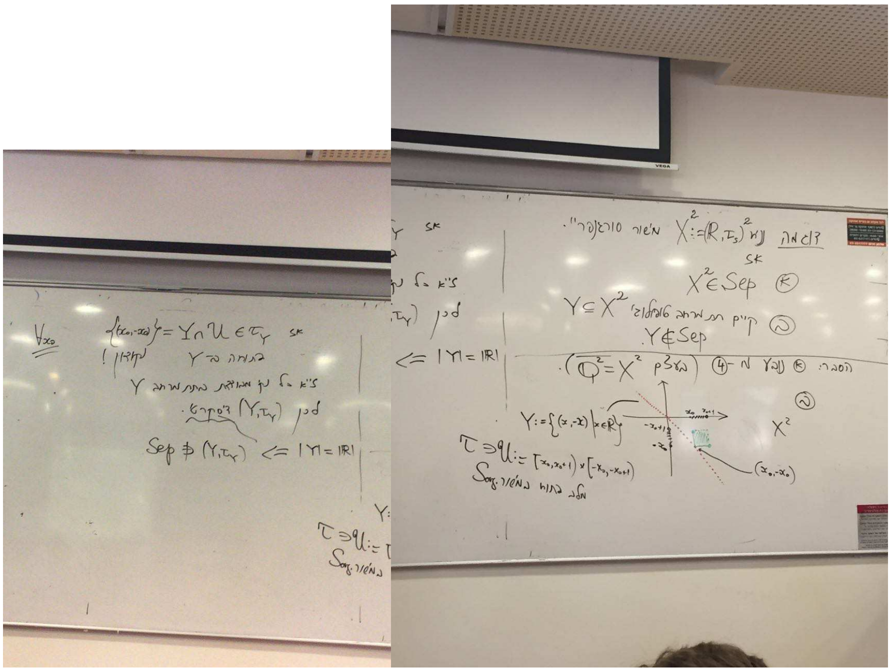
4. $X_i \in \text{Sep}$, $i = 1 \ldots n$ אזי $\prod_{i=1}^n X_i \in \text{Sep}$

<u>דוגמה</u>: נניח $X^2 := (\mathbb{R}, \tau_s)^2$ מישור סורגנפריי. אזי:

1. $X^2 \in \text{Sep}$
2. קיים תת-מרחב טופולוגי $Y \subseteq X^2$ כך ש-$Y \notin \text{Sep}$

<u>הסבר</u>:

1. נובע מ-4 (בעצם, $\overline{\mathbb{Q}^2} = X^2$)



2. **ציור!**

<u>הגדרה 2</u>: נניח (X, τ) מ"ט.

$\alpha \subset P(X)$ נקרא **תת-בסיס** (Sub-basis) אם $\alpha^{\cap F}$ הוא בסיס ל-τ.

<u>שקול</u>: $\tau = (\alpha^{\cap F})^{\cup}$.

$\alpha^{\cap \Gamma} =: \{$חיתוכים סופיים דרך איברים של $\alpha\}$

1.1 תכונות ודוגמות

1. כל בסיס הוא תת-בסיס
2. ב-$X = \mathbb{R}$, $\alpha := \{(-\infty, b), (a, \infty) | a, b \in \mathbb{R}\}$ תת-בסיס שאינו בסיס

$\alpha^{\cap F} \supset \{(a, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$ (מכיל בסיס) אבל α לא בסיס כי למשל $\alpha^{U} \not\ni (0, 1)$

3. ב-$\mathbb{R}^2$, $\alpha := \{\text{Strips}\} = \{(a, b) \times \mathbb{R}, \mathbb{R} \times (a, b) | (a, b) \in \mathbb{R}\}$ הוא תת-בסיס שאינו בסיס
4. ב-$X_1 \times X_2$, $\{O_1 \times X_2, X_1 \times O_2 | O_1 \in \tau_1, O_2 \in \tau_2\}$ תת-בסיס
5. ב-$X = \prod_{i=1}^{n} X_i$,

$$\alpha = \text{Elementary Boxes} = \{X_1 \times X_2 \ldots \times O_{i_0} \times \ldots \times X_n | O_{i_0} \in \tau_{i_0}\} = \{\pi_i^{-1}(O_i) | i = 1 \ldots n,\ O_i \in \tau_i\}$$

זהו תת-בסיס לטופולוגיית המכפלה.

טופולוגיה - הרצאה 10

ליאור פולק

15 במאי 2016

<u>טענה</u>: נניח X קבוצה לא ריקה, וגם $\gamma \subseteq P(X)$ (אוסף של תת-קבוצות ב-X).

אזי התנאים הבאים שקולים:

1. קיימת טופולוגיה τ על X כך ש-γ בסיס ל-τ (ואז $\tau = \gamma^U$)
2. :-)

() שני אלו:

i. $x \in C_x \subseteq A \cap B \quad \exists C_x \in \gamma : \quad \forall A, B \in \gamma \, \forall x \in A \cap B$ (ששקול ל-$\underbrace{\gamma^{\cap_F}}_{\ni A\cap B = \bigcup_{x \in A\cap B} C_x} \subseteq \gamma^U$)

ii. γ כיסוי של X $\left(X \in \gamma^U\right)$

<u>הוכחה</u>: לבד!

2) <= 1) נגדיר $\tau := \gamma^U$ ונוכיח (X, τ) מ"ט.

<u>הערה</u>: * $\gamma^{\cap_F} \subseteq \gamma$ ($\Leftarrow$ $\gamma^{\cap_F} \subseteq \gamma^U$ מכיוון ש-$\gamma \subseteq \gamma^U$)

ומכאן * ו-(i) נותנים ש-$\tau := \gamma^U$ היא אכן טופולוגיה!

<u>דוגמה</u>: $X = \mathbb{R}$, $\gamma = \{[a, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$ (אהלן Sorgenfrey)

מתקיים אפוא *, דהיינו $\tau_S := \gamma^U$ היא טופולוגיה על $\mathbb{R}$.

<u>דוגמה</u>: (מכפלה טופולוגית במקרה הכללי) 

נניח (X_j, τ_j) מ"ט, $\forall i \in I$. אזי:

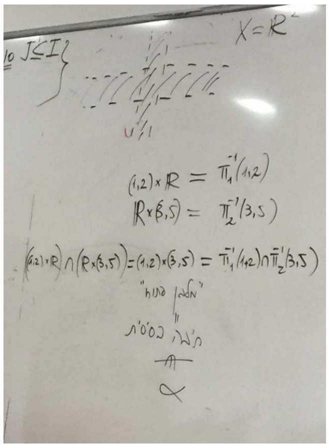
$$X := \prod_{i \in I} X_i := \left\{\omega : I \to \bigcup_{i \in I} X_i, \ \omega(i) \in X_i\right\} = \{(x_i)_{i \in I} | x_i \in X_i\}$$

<u>הערה</u>: למשל אם $I := \{1, \ldots, n\}$ אזי $\omega : I \to \bigcup_{i=1}^{n} X_i, \ \omega(i) \in X_i$ =n-יה (ללא חשש חילול השם!)
$(x_1, x_2, \ldots x_n), \ x_i \in X_i$.

<u>הגדרת טופולוגיה טבעית על</u> $X := \prod_{i\in I} X_i$:

לוקחים טופולוגיה τ שמקיימת:

1. $\pi_i : \prod_{i\in I} X_i \to X_i$ (ולפעמים מסמנים P_i), רציפות
2. τ הטופולוגיה הכי קטנה שמקיימת את 1.
   אזי נגדיר "תיבות אלמנטריות"=:α=:$\left\{\pi_i^{-1}(O_i) | O_i \in \tau_i\right\}$. חייב להתקיים $\alpha \subset \tau$. מאקסיומת הטופולוגיה השנייה נקבל $\alpha^{\cap F} \subset \tau$, ומהשלישית נקבל $\left(\alpha^{\cap F}\right)^U \subset \tau$. שעת ציור!



אזי $\alpha^{\cap F} := \left\{ \bigcap_{j\in J} \pi_j^{-1}(O_j) | J \subseteq I, \text{ J is final} \right\}$

ברור כי $\left(\alpha^{\cap F}\right)^{\cap F} = \alpha^{\cap F}$. אם נגדיר $\gamma := \alpha^{\cap F}$ נקבל כי $\gamma = \gamma^{\cap F}$ ומתקיים *.

אזי מהטענה נובע כי $\tau = \gamma^U = \left(\alpha^{\cap F}\right)^U$ טופולוגיה על X (זאת ההגדרה של טופולוגית מכפלה).

<u>דוגמה</u>: $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} | x_n \in \mathbb{R}\}$.

<u>תיבות אלמנטריות</u> כאן הן למשל

$$(3,6)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\ldots$$

או

$$\mathbb{R}\times(0,1)\times\mathbb{R}\times\ldots$$

יש חופש במקום אחד בלבד!

<u>תיבות בסיסיות</u> כאן הן למשל

$$(3,6)\times(0,1)\times\mathbb{R}\times\ldots$$

או

$$(0,1)\times(0,1)\underbrace{\ldots}_{n\text{ times}}(0,1)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\ldots$$

<u>**אזהרה**</u>: נשים לב כי $(0,1)\times(0,1)\times\ldots = (0,1)^{\mathbb{N}} \notin \tau$ **לא פתוחה!**

הקבוצה לא מכילה אף תיבה בסיסית ולכן $\text{int}(0,1)^{\mathbb{N}} = \phi$

<u>תרגיל</u>: $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ לא קומפקטי מקומית.

הגדרה 1: מרחב טופולוגי X נקרא קומפקטי מקומית אם לכל נקודה $x \in X$ קיימת סביבה $U \in N(x)$ קומפקטית.

למשל: $\mathbb{R}^n$ ק"מ, אבל $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ לא ק"מ (שימו לב לחזקות).

תרגיל: הוכיחו שמכפלה שומרת על T_1, T_2.

שאלה כללית: מהן התכונות שנשמרות ע"י מכפלה?

$T_0, T_1, T_2, T_3, T_{3.5}$ **נשמרות**

קומפקטיות **נשמרת** (טיכונוף)

קשירות, קשירות מסילתית **נשמרת**

קומפקטיות מקומית **לא נשמרת** (נשים לב שבמקרה האינסופי זה לא נשמר, אך במקרה הסופי זה כן נשמר)

הגדרה 2: (יחס סדר לינארי=מלא)

נאמר שיחס $\leq$ על קבוצה X הוא יחס סדר לינארי (מלא) ונסמן $(X,\leq)$ אם מתקיימים:

1. $x \leq x$
2. $x \leq y \wedge y \leq x \Leftarrow x = y$
3. $x \leq y \wedge y \leq z \Leftarrow x \leq z$
4. $x \not\leq y \Leftarrow y \leq x$

הערה: (טופולוגיזציה של קבוצה סדורה לינארית)

הרעיון דומה להגדרת טופולוגית מכפלה ומבוסס על הטענה הבאה:

טענה: (טופולוגיזציה דרך תת-בסיס)

נניח $X \neq \phi$, $\alpha \subseteq P(X)$ כך ש-α היא כיסוי של X.

אזי קיימת טופולוגיה τ כך ש-α הוא תת-בסיס ל־τ (ואז $\tau = (\alpha^{\cap_F})^U$)

הסבר: נגדיר $\gamma := \alpha^{\cap_F}$. אזי $\gamma^{\cap_F} = \gamma$ (זהו *) ולפי טענה מתקיים ב*, דהיינו $X \in \gamma^U$ שזה א. לכן γ בסיס ל-$\tau := \gamma^U$ בגלל הטענה שהוכחנו.

אם $(X,\leq)$ קבוצה סדורה לינארית אז מגדירים:

$$\alpha := \{(-\infty,b),(a,\infty) | a,b \in X\}, \quad (a,\infty) := \{x \in X | a < x\},\ (-\infty,b) := \{x \in X | x < b\}$$

אזי α כיסוי ל-X. לכן $\tau_{\leq} := (\alpha^{\cap_F})^U$ הטופולוגיה הטבעית על X, "טופולוגית הסדר".

$$\tau_{\leq} \supseteq \{(a,b) | a,b \in X\}, \quad (a,b) := \{x \in X | a < x < b\}$$

למשל ב-$\mathbb{R}$: $\{(a,b) | a,b \in X\}$ הוא בסיס ל-$\tau_{\leq}$. ברור כי הטופולוגיה הרגילה של $\mathbb{R}$ = $\tau_{\leq}$.

לכל סדר מלא $(X,\leq)$, $\alpha := \{(-\infty,b),(a,\infty) | a,b \in X\}$ תמיד תת-בסיס

דוגמה: (Lexicographic order)

$X = [0,1] \times [0,1]$, ונגדיר סדר

$$(x_1,x_2) \leq (y_1,y_2) =^{def} \begin{cases} x_1 < y_1 \\ x_1 = y_1 \wedge x_2 \leq y_2 \end{cases}$$

אזי $(X,\tau_{\leq})$ מ"ט.

תרגיל: א. $\{(x,y) | y_1 < y < y_2\}$ פתוח בטופולוגיה $\tau_{\leq}$

ב. $\left\{\frac{1}{2}\right\} \times [0,1]$ תת-מרחב דיסקרטי

טענה: נניח X,Y מ"ט, ושנתונה פונקציה $f: X \to Y$, ו-α תת-בסיס לטופולוגיה ב-Y.

אזי fרציפה $\iff$ $\forall O \in \alpha : f^{-1}(O) \in \tau_X$, τ_X טופולוגיה ב-X, $\alpha \subset \tau_Y$

הסבר:

$\Leftarrow$ ברור!

$\Rightarrow$ לכל $U \in \tau_Y$ מתקיים $U \in (\alpha^{\cap_F})^U = \tau_Y$. כעת f^{-1} שומרת על איחודים וחיתוכים ולכן $f^{-1}(\alpha) \subseteq \tau_X$ ומכאן נקבל ש-$f^{-1}((\alpha^{\cap_F})^U) \subseteq \tau_X$.

■

טענה: רציפות בנקודה $x \in X$ מספיק. בדקו עבור בסיס מסוים של $y = f(x)$.

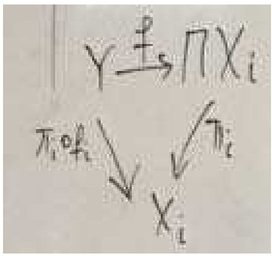
משפט 1: נניח $X=\prod_{i\in I} X_i$ מכפלה טופולוגית של מ"ט $i\in I$ (X_i,τ_i).

Y מ"ט ונתונה פונקציה $f:Y\to X$.

אזי התנאים הבאים שקולים:

1. $f:Y\to\prod X_i$ רציפה
2. $\pi_i\circ f:Y\to X_i$ רציפה $\forall i\in I$ (דהיינו מספיק לבדוק רציפות נקודתית, בכל קואורדינטה וקואורדינטה)

הוכחה: בציור!



$1\Leftarrow 2$ ברור (הרכבה של פונקציות רציפות)

$1\Rightarrow 2$ לפי הגדרת טופולוגית המכפלה τ על X, $\tau=(\alpha^{\cap_F})^U$.

$\{\text{Elementary boxes}\}=\alpha=\left\{\pi_i^{-1}(O_i)|O_i\in\tau_i,\, i\in I\right\}$ הוא תת–בסיס ל-τ. נפעיל את טענה 3 (מספיק לבדוק רציפות על תת–בסיס), ולכן מספיק להוכיח כי $\forall O\in\alpha\ f^{-1}(O)\in\tau_Y$

לפי הגדרת α, כל $O\in\alpha$ שווה לת"א

$$\exists i\in I\exists O_i\in\tau_i\quad O=\pi_i^{-1}(O_i)$$

צ"ל $f^{-1}(O)=f^{-1}(\pi_i^{-1}(O_i))\in\tau_Y$

שקול להוכיח $(\pi_i\circ f_i)^{-1}(O_i)\in\tau_Y$ אבל זה נכון בגלל הנחה 2 כי כל $\pi_i\circ f_i$ רציפה.

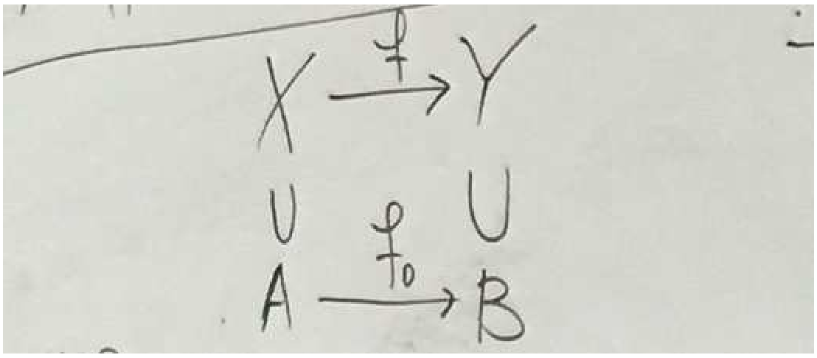
■

<u>תכונה חשובה לרציפות</u> (תורשתיות)

נניח $f : X \to Y$ רציפה, $\phi \neq A \subseteq X$, $\phi \neq B \subseteq X$, $f(A) \subseteq B$.

אזי הפונקציה $f_0 : A \to B, \quad x \mapsto f(x)$ (הצמצום) גם רציפה.

<u>הסבר</u>: ציור!



צ"ל שמקור של קבוצה פתוחה ב-B גם פתוחה ב-A.

קבוצה פתוחה טיפוסית ב-B (כלומר מטופולוגיה $(\tau_Y)_B$) נראית $O \cap B,\ O \in \tau_Y$ (לפי הגדרת טופולוגיית תת-מרחב).

צ"ל $f_0^{-1}(O \cap B)$ פתוחה ב-A.

$$f_0^{-1}(O \cap B) = \{x \in A | f(x) \in O \cap B\} = f^{-1}(O \cap B) \cap A = f^{-1}(O) \cap f^{-1}(B) \cap A = f^{-1}(O) \cap A$$

והמעבר האחרון לפי כך ש-$A \subseteq f^{-1}(B)$.

מכיוון ש-$f : X \to Y$ רציפה נקבל ש-$f^{-1}(O)$ פתוחה ב-X.

לכן $f^{-1}(O) \cap A$ פתוחה ב-A (לפי הגדרת טופולוגיית תת-מרחב).

<u>תוצאה</u>: לכל הומיאומורפיזם $f : X \to Y$ ולכל $\phi \neq A \subseteq X$, $f_0 : A \to f(A)$ גם הומאומורפיזם.

1 אקסיומות הפרדה (המשך)

(נקראת נורמלית) $X \in T_4$ אם $X \in T_1$ וגם לכל 2 קבוצות סגורות וזרות יש סביבות פתוחות וזרות.

$$\forall A, B \text{ closed} \quad A \cap B = \phi| \quad \exists U \in N(A), \exists V \in N(B) : U \cap V = \phi$$

(נקראת Completely Regular או Tychonoff) $X \in T_{3\frac{1}{2}}$ אם $X \in T_1$ ולכל נקודה $a \in X$ ולכל קבוצה סגורה $a \notin B \subseteq X$ יש פונקציה **רציפה** $f : X \to [0,1]$ כך שהפונקציה מפרידה אותם, דהיינו $f(a) = 0,\ f(B) = 1$.

<u>תרגיל</u>: תנאי ב של T_4 שקול לתנאי הבא: לכל A סגורה ב-X ולכל סביבה U של A קיימת סביבה V של A כך ש-cl(V)⊆U.

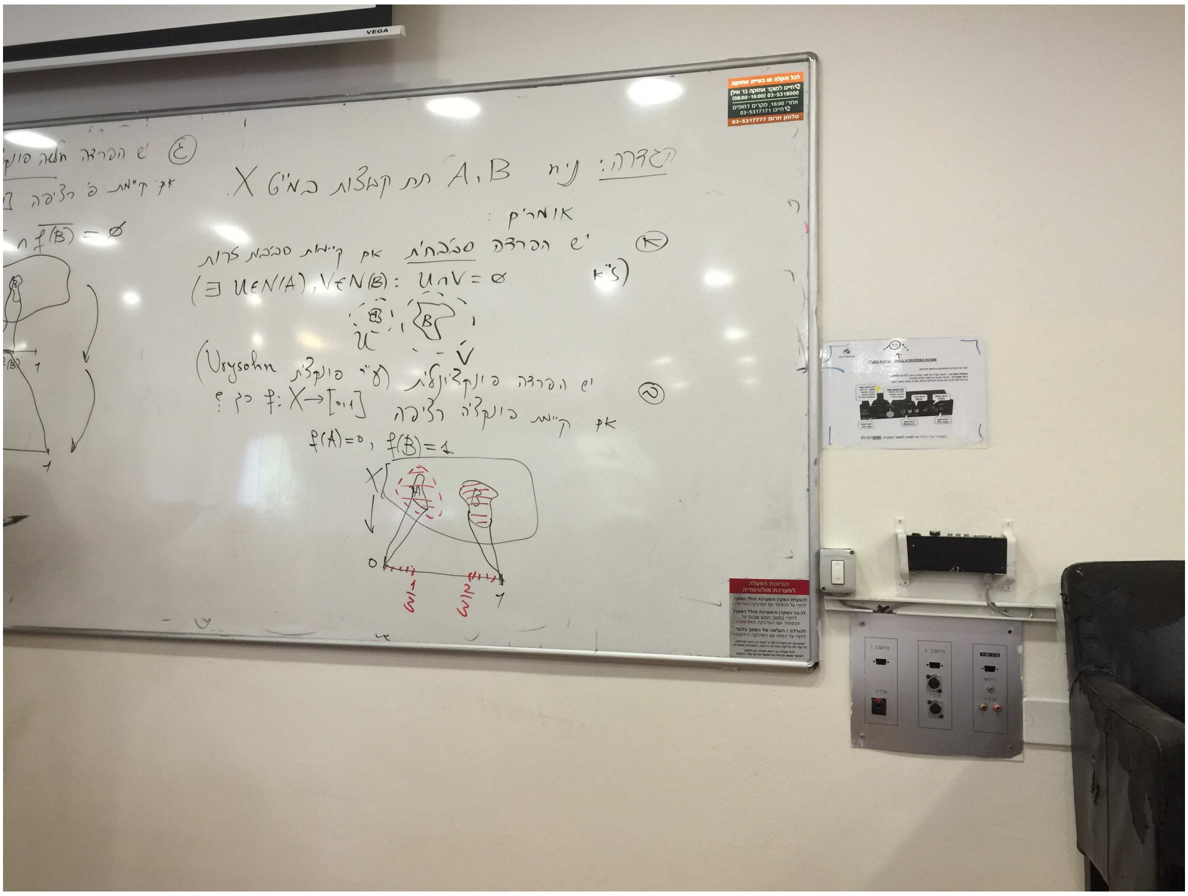
טופולוגיה – הרצאה 11

ליאור פולק

22 במאי 2016

<u>הגדרה 1</u>: נניח A, B תת קבוצות במ"ט X. אומרים:

1. יש הפרדה **סביבתית** אם קיימות סביבות זרות
($\exists U \in N(A), V \in N(B) \quad U \cap V = \phi$,ז"א) **ציור**
2. יש הפרדה **פונקציונלית** (ע"י פונקציית Urysohn) אם קיימת פונקציה רציפה $f : X \to [0,1]$ כך ש-$f(A) = 0,\ f(B) = 1$
ציור
3. יש הפרדה **חלשה פונקציונלית** אם קיימת פונקציה רציפה $f : X \to [0,1]$ כך ש-$\overline{f(A)} \cap \overline{f(B)} = \phi$ **ציור**

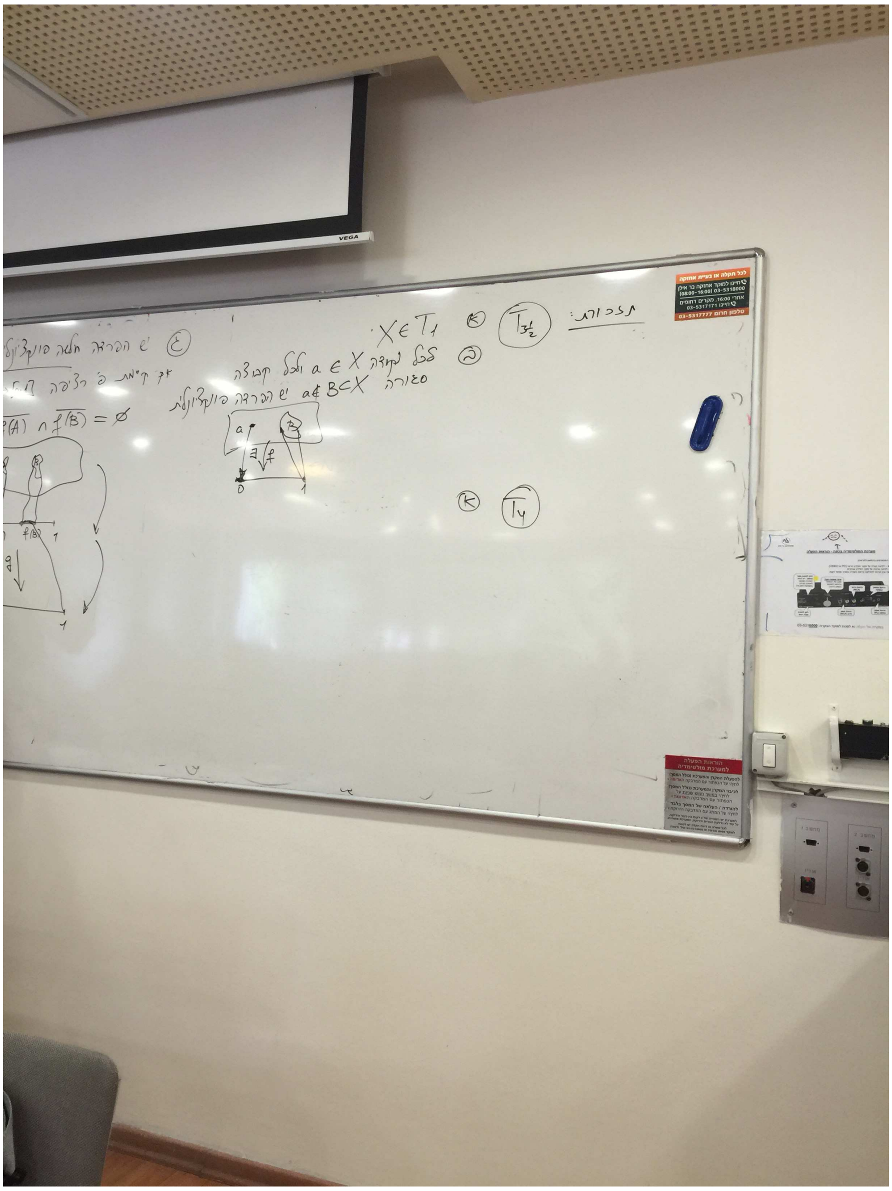


<u>טענה</u>: 1,2,3 שקולים בכל מרחב T_4. בשלב זה נציין רק דברים ברורים:

2 גורר את 1, 2 גורר את 3. הגדרות אחרות נשלים אחרי **משפט** $T_4 \supset$ Metriz.

<u>תזכורת</u>: $T_{3\frac{1}{2}}$ קורה אם $X \in T_1$ וגם לכל נקודה $a \in X$ ולכל קבוצה סגורה $a \notin B \subset X$ יש הפרדה פונקציונלית ע"י פונקצית Urysohn.

T_4 קורה אם $X \in T_1$ ולכל שתי קבוצות סגורות זרות A, B יש הפרדה פונקציונלית.



<u>חידוש</u>: T_4^f קורה אם $X \in T_1$ ולכל שתי קבוצות סגורות זרות A, B יש הפרדה סביבתית.

<u>הערה</u>: ברור כי $T_4 \Leftarrow T_4^f$, $T_{3\frac{1}{2}} \Leftarrow T_4^f$.

בגלל הטענה (מקור של קבוצה פתוחה הוא פתוח בפונקציות רציפות) נקבל כי $U := f^{-1}[0, \frac{1}{3}),\ V := f^{-1}(\frac{1}{3}, 1]$.

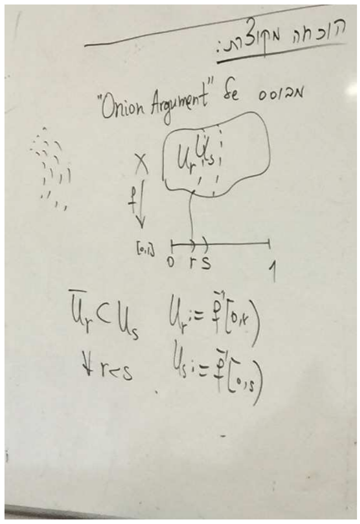
הלמה של אוריסון קובעת כי $T_4^f \equiv T_4$.

<u>משפט</u>: (Urysohn's Lemma)

$$T_4 \iff T_4^f$$

<u>הוכחה מקוצרת</u>:

מבוסס על "Onion Argument":



נכון גם ההפך במובן הבא:

נניח $D \subset [0,1]$ תת קבוצה צפופה, ונניח גם שנתונה העתקה $D \to^{\varphi} \tau$, $\quad r \mapsto U_r$ כך ש-

$A \subseteq U_r \subseteq B^c$ וגם $\overline{U_r} \subseteq U_s$, $\forall r < s$.

<u>טענה</u>: הפונקציה הבאה- $f : X \to [0,1]$,

$$f(x) = \begin{cases} \inf\ r \in D & x \in U_r \\ 1 & x \notin U_r, \forall r \in D \end{cases}$$

היא רציפה וגם $f(A) = 0, \quad f(B) = 1$.

הבנייה של D ו-φ:

$D := \left\{ \frac{a}{2^n} | 0 \leq a \leq 2^n, a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$ דיאדיים רציונליים. את φ בונים באינדוקציה.

הגדרת T_4 שקולה לכך ש-$X \in T_1$ ושלכל קבוצה סגורה $A \in X$ ולכל סביבה פתוחה U של A יש סביבה פתוחה V של A כך ש-$\overline{V} \subset U$.

זוהי $\text{USL} =$ Urysohn's Small Lemma.

אם נתונות $A \cap B = \phi$ סגורות וזרות ב-X, בגלל T_4 נקבל שקיימות סביבות פתוחות זרות $U \in N(A)$, $V \in U(B)$, $U \cap V = \phi$.

<u>התחלת האינדוקציה</u>:

$U_0 = U, \quad U_1 = B^c$

$\overline{U_0} \subset U_1$. בנייה של $U_{\frac{1}{2}}$ דרך USL: קיימת סביבה פתוחה $U_{\frac{1}{2}}$ של $\overline{U_0}$ כך ש-$\overline{U_0} \subset U_{\frac{1}{2}} \subset \overline{U_{\frac{1}{2}}} \subset U_1$.

באופן דומה נמשיך.

<u>תוצאה</u>:

$$T_3 \supset T_{3\frac{1}{2}} \supset T_4 = T_4^f$$

<u>הערה</u>:

$$T_{3\frac{1}{2}} = \text{Completely Regular, Tychonoff Space}, \quad T_4 = \text{Normal}$$

כמו כן, $Metriz \subset T_4$, $Comp \cap T_2 \subset T_4$, $T_4 \supset \text{LOTS=Linearly Ordered Topological Space} = \cancel{Low\, Order\, Thinking\, Skills}$.

<u>משפט 1</u>: $Metriz \subset T_4$, ז"א כל מרחב מטריזבילי הוא נורמלי.

<u>הוכחה</u>:

$f_A(x) = d(x,A) \quad f_A : X \to \mathbb{R}$, $f_B(x) = d(x,B) \quad f_B : X \to \mathbb{R}$ הן פונקציות ליפשיץ (ולכן רציפות).

נגדיר $f : X \to [0,1]$, $f(x) = \frac{f_A(x)}{f_A(x)+f_B(x)} = \frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}$

1. <u>שימו לב</u>: המכנה **לא מתאפס!**

$$d(x,A)+d(x,B)=0 \Rightarrow \begin{cases} d(x,A)=0 \\ d(x,B)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \in \overline{A} = A \\ x \in \overline{B} = B \end{cases} \quad \Rightarrow x \in A \cap B = \phi$$

בסתירה!

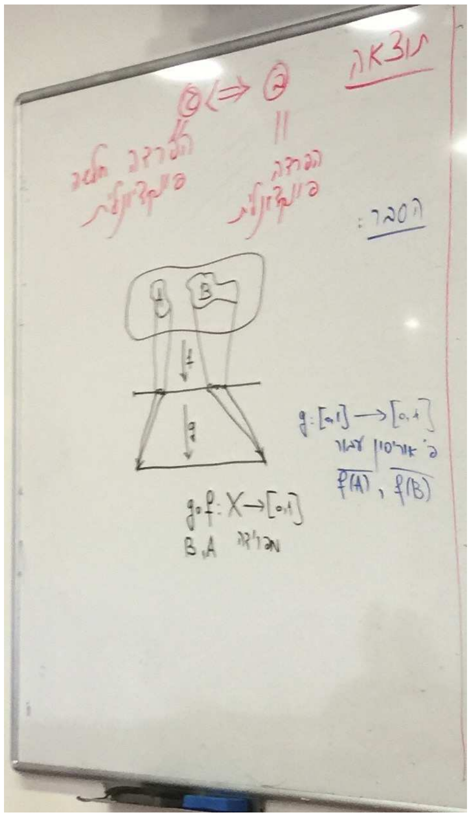
2. $f(x)$ רציפה כמנת רציפות
3. $0 \le f(x) \le 1$
4. $\forall a \in A, f(a) = 0 \quad \forall b \in B, f(b) = 1$

לסיכום: f מפרידה את A, B, ולכן כל מ"מ הוא נורמלי.

■

<u>תוצאה</u>: (הפרדה פונקציונלית) 2 $\iff$ 3 (הפרדה פונקציונלית חלשה)

<u>הסבר</u>:



<u>משפט 2</u>: $X \in T_1 \wedge \dim X = 0 \Rightarrow X \in T_{3\frac{1}{2}}$

<u>הוכחה</u>: מספיק לבדוק רק את תנאי ב מהגדרת $T_{3\frac{1}{2}}$, דהיינו מ"ל שלכל נקודה $a \in X$ ולכל קבוצה סגורה $a \notin B \subset X$ קיימת הפרדה פונקציונלית.

תזכורת: $\dim X = 0$ אומר שקיים בסיס γ לטופולוגיה τ כך שכל $V \in \gamma$ קבוצה **סגוחה**.

למדנו תנאי שקול לבסיס שגורר כי קיים $V \in \gamma$ כך ש-$a \in V \subset U := B^c$.

הרעיון הוא לפרק טופולוגית את X ולשלוח את האיברים מהפירוק בהתאם ל-0 או 1. הרציפות תנבע מהסגיחות של הקבוצות.

נמשיך: V סגוחה ולכן V^c סגוחה. $X = V \cup V^c$ איחוד זר של קבוצות סגוחות. נשלח את איברי V ל-0 ואת איברי V^c ל-1, דהיינו

$$f : X \to [0,1] \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x \in V \\ 1 & x \in V^c \end{cases}$$

קל לבדוק ש-f רציפה (בעזרת מקור של פתוחה הוא פתוחה), וגם $f(B) = 1 \quad f(a) = 0,$.

■

תוצאה: $(\mathbb{R}, \tau_s) \in T_{3\frac{1}{2}}$

תרגיל: $[0,1] \times [0,1] \supset X = [0,1] \times \{0,1\}$ עם הסדר הלקסיקוגרפי.

הוכיחו שמ"ט מתאים $(X, \tau_{\leq})$ הוא בעל מימד 0 (ואז הסיקו שגם רגולרי לחלוטין, $T_{3\frac{1}{2}}$)

0.1 קשירות

תזכורת: מ"ט X נקרא **לא קשיר** אם קיים **פירוק טופולוגי** של X,

ז"א אם יש שתי קבוצות פתוחות (שקול- סגוחות, סגורות) $O_1, O_2 \subset X$ כך ש:

$$X = O_1 \cup O_2 \quad O_1, O_2 \neq \phi, \quad O_1 \cap O_2 = \phi$$

טענה: התנאים הבאים שקולים:

1. $X \in \mathrm{Conn}$ (ז"א לא קיים פירוק)
2. קבוצות סגוחות הן רק ϕ, X
3. **לא** קיימת פונקציה רציפה ועל $X \to^f \{0,1\} \subset \mathbb{R}$

הגדרה: מ"ט X נקרא **קשיר מסילתית** אם לכל $a, b \in X$ קיימת פונקציה רציפה $X \to^f [0,1]$ כך ש-$f(1) = b \quad f(0) = a,$.

פונקציה שכזאת נקראת **מסילה** מ-a ל-b. נסמן $X \in \mathrm{PConn}$.

הערה:

1. $\mathrm{PConn} \subset \mathrm{Conn}$
2. מסילות לא תמיד דומות לעקומות. למשל, ידוע "עקומות Peano": $\exists f : [0,1] \to [0,1]^n$ רציפות ועל (נכון גם עבור $[0,1]^{\mathbb{N}}$)

משפט 3: תמונה רציפה שומרת על קשירות ועל קשירות מסילתית.

הוכחה:

קשירות: נניח X קשיר, f רציפה. צ"ל $Y = f(X)$ קשיר. נניח בשלילה שלא, ז"א יש פירוק טופולוגי ל-Y, $Y = Y_1 \cup Y_2$,

כך ש-Y_1, Y_2 הן סגוחות, זרות ולא ריקות. אזי: $X = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$ ובגלל הרציפות של f אלו סגוחות, זרות ולא ריקות (שכן f היא על $f(X)$). קיבלנו ש-X לא קשיר בסתירה!

■

קשירות מסילתית: בדומה, נניח X קשיר מסילתית, f רציפה. צ"ל $Y = f(X)$ קשיר מסילתית. ניקח $y_1, y_2 \in Y$. f על ולכן קיימים להם מקורות $x_1, x_2 \in X$. קיימת מסילה מ-x_1 ל-x_2, $[0,1] \to^{\varphi} X$, $\varphi(0) = x_1, \varphi(1) = x_2$.
אזי ההרכבה $f \circ \varphi$ היא מסילה מ-y_1 ל-y_2.

■

<u>הגדרה 2</u>: נניח $(E, ||\cdot||)$ מרחב נורמי. תת-קבוצה $X \subset E$ נקראת **קמורה** (Convex Subset) אם לכל $x, y \in X$ מתקיים

$$\{(1-t)x + ty | 0 \le t \le 1\} \subseteq X$$

נשים לב:

$$\varphi : [0,1] \to E \quad \varphi(t) = (1-t)x + ty, \ 0 \le t \le 1$$

היא **מסילה לינארית** (עבור $x, y \in X$ נתונים).

<u>הערה</u>: φ שכזאת היא פונקצית ליפשיץ, $\varphi \in \mathrm{Lip}_{||x-y||}$.

<u>טענה</u>: כל תת-מרחב קמור $X \subseteq E$ הוא מרחב קשיר מסילתית (ולכן גם קשיר).

<u>הסבר</u>: מיידי מההגדרות.

טופולוגיה - הרצאה 12

ליאור פולק

22 במאי 2016

<u>תזכורת:</u>

<u>הגדרה 1:</u> נניח $(E, ||\cdot||)$ מרחב נורמי. תת-קבוצה $X \subset E$ נקראת **קמורה** (Convex Subset) אם לכל $x, y \in X$ מתקיים

$$\{(1-t)x + ty | 0 \le t \le 1\} \subseteq X$$

<u>טענה 1:</u> $\text{Conv} \subset \text{PConn} \subset \text{Conn}$ כאשר Conv אלו הם המרחבים הקמורים.

■

<u>הוכחה:</u> $\text{Conv} \subset \text{PConn}$: ברור מההגדרות

$\text{PConn} \subset \text{Conn}$: בשלילה, נניח $X \in \text{PConn}, X \notin \text{Conn}$.

מאי-קשירות נקבל פירוק טופולוגי $X = X_1 \cup X_2$. יהיו $x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2$.

מהקשירות המסילתית יש פונקציה רציפה $X \xrightarrow{f} [0,1]$ כך ש-$0 \mapsto x_1,\ 1 \mapsto x_2$.

נגדיר $Y_1 = f^{-1}(X_1),\ Y_2 = f^{-1}(X_2)$

אזי בעצם $Y_1 \cup Y_2 = [0,1]$ הוא פירוק טופולוגי של $[0,1]$, בסתירה לכך ש$[0,1]$ קשיר.

■

<u>טענה 2:</u> נניח $X \subset \mathbb{R}$ תת-מרחב. התנאים הבאים שקולים:

1. $X \in \text{Conn}$
2. X קטע (ייתכן שלא חסום)

<u>הוכחה:</u>

<u>תזכורת:</u> תת-קבוצה X ב-$\mathbb{R}$ היא קטע אם $a \le b \le c,\ a, c \in X \Rightarrow b \in X$.

$1 \Leftarrow 2$

אם נניח בשלילה ש-X לא קטע אזי יש פירוק טופולוגי $X = X_1 \cup X_2$ כך ש:

$$a \in X_1 = (-\infty, b) \cap X \neq \phi$$
$$c \in X_2 = (b, \infty) \cap X \neq \phi$$

$2 \Leftarrow 1$

לפי טענה 1, $\{\text{Subsets in } \mathbb{R}\} \subset \text{Conv} \subset \text{Conn}$.

■

<u>משפט 1</u>: (ערך הביניים)

התנאים הבאים שקולים:

1. $X \in \mathrm{Conn}$
2. לכל פונקציה רציפה $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ יש תכונת ערך-הביניים (שקול ל-$f(X)$ הוא קטע, שקול ל-$\forall x_1, x_2 \in X, \quad f(x_1) \le b \le f(x_2) \quad \exists x_3 \in X : b = f(x_3)$)

<u>הוכחה</u>:

$2 \Leftarrow 1$

הוכחנו שתמונה רציפה שומרת על קשירות. לכן $\mathbb{R} \supset f(X) \in \mathrm{Conn}$. מטענה 2 עבור $f(X)$ נקבל כי $f(X)$ הוא קטע.

$1 \Leftarrow 2$

נניח בשלילה ש-X אינו קשיר. פירוק בנוהל $X = X_1 \cup X_2$. נבחר את f כך שיתקיים $f(X_2) = 1 \quad f(X_1) = 0,$ ולכן $f(X) = \{0, 1\}$ שלא קטע בסתירה ל-2.

■

<u>דוגמות של $X \in \mathrm{Conv}$</u>:

1. קטעים ב-$\mathbb{R}$
2. כדורים, כדורים סגורים בכל מ"נ
3. כל מ"נ
4. אליפסה (בדו-מימד)

<u>משפט 2</u>: (אלומות)

נניח X מ"ט, $X = \bigcup_{j \in J} Y_j$ כך ש:

1. $\forall j \in J, Y_j \in \mathrm{Conn}$ (כתת-מרחב)
2. $\bigcap_{j \in J} Y_j \neq \phi$

אזי $X \in \mathrm{Conn}$.

<u>הוכחה</u>:

מב' נקבל שיש נקודה אחת לפחות באיחוד, $z \in \bigcap_{j \in J} Y_j$. בשלילה $X \notin \mathrm{Conn}$. פירוק: $X = X_1 \cup X_2$.

בה"כ $z \in X_1$. לכן $z \notin X_2$. נקבל $\forall j \quad Y_j = (Y_j \cap X_1) \cap (Y_j \cap X_2)$. זהו איחוד של שתי קבוצות שפתוחות ב-Y_j, דהיינו מצאנו פירוק טופולוגי ל-Y_j. הנחנו בה"כ $z \in X_1$ אבל גם $z \in \bigcap_{j \in J} Y_j$ ולכן $z \in Y_j \cap X_1$.

בגלל שכל $Y_j \in \mathrm{Conn}$ נקבל $Y_j \cap X_2 = \phi$ (שהרי הקבוצה השנייה בפירוק הטופולוגי של Y_j לא ריקה). מכאן $X_2 = \bigcup_{j \in J} (Y_j \cap X_2) = \phi$ וסתירה לכך ש-$X_2 \neq \phi$ מהפירוק.

תוצאה:

1. נניח $Y_1 \cap Y_2 \neq \phi \quad Y_1, Y_2 \in \text{Conn}, \quad X = Y_1 \cup Y_2$. אזי $X \in \text{Conn}$.
2. (שרשור)
נניח $X \supset Y_k \in \text{Conn}$, כך ש-$Y_k \cap Y_{k+1} \neq \phi$, $\forall k \in \mathbb{N},\ Y_k$ is a subspace. אזי $Y = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Y_k \in \text{Conn}$.

הוכחה:

1. מקרה פרטי של משפט האלומות (איחוד של שני מרחבים)
2. מ-1 ואינדוקציה:
$A_k = Y_1 \cup Y_2 \ldots \cup Y_k \in \text{Conn} \quad : \forall k \in \mathbb{N}$. אבל $A_k \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \supset Y_1 \neq \phi$ ולכן $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k \neq \phi$. נסיים עם משפט האלומות.

■

הגדרה 2: (מרכיבי קשירות)

במ"ט X נגדיר את היחס הבא:

$$x \equiv y \overset{\text{def}}{=} x, y \in A_{x,y} \ \text{Conn} \in A_{x,y} : X \subseteq \exists A_{x,y}$$

זהו יחס שקילות!

1. $x \equiv x$ (הסבר: $A_{x,y} = \{x\}$)
2. $x \equiv y \Rightarrow y \equiv x$ (הסבר: $A_{x,y} = A_{y,x}$)
3. $x \equiv y \wedge y \equiv z \Rightarrow x \equiv z$ (הסבר: $A_{x,z} = A_{x,y} \cup A_{y,z}$ שהוא קשיר מתוצאה 1)

הגדרה 3: מרכיב קשירות של נקודה $x \in X$ הוא:

$$[x] = \{y \in X | x \equiv y\}$$

הערה: מספרם (עצמתם) של מרכיבי קשירות נשמר ע"י הומיאומורפיזם.

הגדרה 4: (מרכיבי קשירות מסילתית)

במ"ט X נגדיר יחס

$$x \equiv_P y \overset{\text{def}}{=} \text{There exists a path from x to y}$$

זה גם יחס שקילות!

1. $x \equiv_P x$ (הסבר: המסילה הקבועה $f : [0,1] \to X$, $f(t) = x$)
2. $x \equiv_P y \Rightarrow y \equiv_P x$ (הסבר: קיימת מסילה מ-x ל-y, $f : [0,1] \to X$, $f(0) = x,\ f(1) = y$. נגדיר $f^* : [0,1] \to X$, $f^8(t) = f(1-t)$ ואז $f^*(0) = y,\ f^*(1) = x$)
3. $x \equiv_P y \wedge y \equiv_P z \Rightarrow x \equiv_P z$ (הסבר: יש לנו $f_1 : [0,1] \to X,\ f_1(0) = x, f_1(1) = y$, $f_2 : [0,1] \to X,\ f_2(0) = y, f_2(1) = z$. נגדיר $f_3 : [0,1] \to X$ כך ש- $f_3(t) = \begin{cases} f_1(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ f_2(2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$. בדקו שזוהי פונקציה רציפה ושמתקיים $f_3(0) = x,\ f_3(1) = z$)

תרגיל:

נניח $X = Y_1 \cup Y_2$, Y_1, Y_2 סגורות ב-X. תהי $f : X \to Z$ פונקציה מסוימת. התנאים הבאים שקולים:

1. f רציפה
2. $f_1 : Y_1 \to Z,\ f_2 : Y_2 \to Z$ רציפות (בתור הפונקציות המצומצמות של f על Y_1,Y_2 בהתאמה)

תנו דוגמה נגדית אם אין סגירות של אחת הקבוצות!

תכונות: (מרכיבי קשירות)

1. $X = \bigcup_{x \in X} [x]$
2. X קשיר $\iff$ יש מרכיב קשירות 1 בלבד
הסבר: לשמאל, $A_{x,y} = X$ וגו'. לימין, לפי משפט האלומות- נבחר $z \in X$. לכל $x \in X$ יש $z, x \in A_{x,z} \in \mathrm{Conn}$ ולכן $\bigcup_{x \in X} A_{z,x} = X$, וגם $z \in \bigcap_{x \in X} A_{z,x} \neq \phi$.
3. $[x] = \cup\{A \subseteq X | x \in A,\ A \in \mathrm{Conn}\}$ ששקול ל-$[x]$=תת-הקבוצה הגדולה ביותר ב-X המכילה את x וקשירה
הסבר: $\supseteq$ נניח $y \in \cup\{A \subseteq X | x \in A,\ A \in \mathrm{Conn}\}$. צ"ל $y \in [x]$. אזי $\exists A \subseteq X | y \in A \in \mathrm{Conn},\ x \in A$
קיבלנו $y \equiv x$ ולכן $y \in [x]$.
$\subseteq$ נניח $y \in [x]$. צ"ל $y \in \cup\{A \subseteq X | x \in A,\ A \in \mathrm{Conn}\}$. מההנחה נקבל $\exists A_{x,y} \subseteq X | A_{x,y} \in \mathrm{Conn},\ x, y \in A_{x,y}$.
לפי הבנייה, $A_{x,y}$ הוא אחד הגורמים באיחוד ולכן $y \in \cup\{A \subseteq X | x \in A,\ A \in \mathrm{Conn}\}$.

$\blacksquare$

4. $\forall x \in X \quad [x] \in \mathrm{Conn}$ (הסבר: מ-3 ומשפט האלומות)
5. $[x]$ סגור ב-X. הסבר: נובע מה<u>טענה</u>: אם A תת-קבוצה קשירה במ"ט X אזי גם הסגור $\mathrm{cl}(A)$ קשיר (ראו תרגול). לכן נשלים את ההוכחה דרך תכונה 3, והעובדה שתמיד $x \in [x] \subseteq \mathrm{cl}([x])$.

הגדרה 5: X נקרא לא קשיר לחלוטין (totally disconnected) אם תת-קבוצות קשירות ב-X הן רק מהסוג $\{x\}$ לכל $x \in X$.
שקול: $\forall x \in X \quad [x] = \{x\}$.

דוגמות:

1. מרחבים דיסקרטיים
2. קבוצת קנטור
3. $\mathbb{Q}$
4. $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$
5. (*) כל מרחב X בעל מימד 0

הערה: 5(*) $\Leftarrow$ 1,2,3,4

הערה: $\mathrm{PConn} \subsetneq \mathrm{Conn}$, דהיינו לפעמים $[x]_P \subsetneq [x]$. דוגמה מתאימה: נגדיר X מתאים כך ש-$X = A \cup B \subset \mathbb{R}^2$. אזי:
$A = \left\{(x, \sin\frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 | 0 < x \leq 1\right\}$, $B = \{0\} \times [-1, 1]$ זוהי עקומת הסינוס של טופולוגים!

נשים לב: $\mathrm{cl}A = X$ ולכן A צפוף ב-X. יחד עם זאת $A \in \mathrm{Conn}$ ולכן גם $\mathrm{Conn} \ni \mathrm{cl}A = X$ (מרכיב קשירות 1). מצד שני יש ב-X 2 מרכיבי קשירות מסילתיים, A, B (אין מסילה בין נקודה מ-A לבין נקודה מ-B)

קיבלנו $X \in \mathrm{Conn}$, $X \notin \mathrm{PConn}$.

1 קומפקטיות (המשך)

<u>תכונות</u>:

1. כל מרחב סופי הוא קומפקטי

הסבר: $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$ ונתון כיסוי פיתוח $\alpha=\{O_i\}_{i\in I}$. נבחר $x_1\in O_{i_1}$,...,$x_n\in O_{i_n}$. אזי $\{O_{i_1},\ldots,O_{i_n}\}$ תת–כיסוי סופי.

2. איחוד סופי של קבוצות קומפקטיות הוא קומפקטי.

3. (קריטריון קומפקטיות לתת–קבוצה) נניח Y תת–מרחב טופולוגי של X. התנאים הבאים שקולים:

() כ

i. $Y\in \mathrm{Comp}$

ii. לכל אוסף $\alpha=\{O_i\}_{i\in I}$ של קבוצות פתוחות ב–X כך ש–α מכסה את Y קיים תת–אוסף סופי $\{O_{i_1},\ldots,O_{i_n}\}$ שמכסה את Y

הסבר: הגדרת הקומפקטיות והגדרת תת–מרחב

4. $(X,\tau_{cof})\in \mathrm{Comp}$

הסבר: $\forall\phi\neq O\in\tau_{cof}$

אזי $O=X\backslash F$, $F=\{x_1,\ldots,x_n\}$ סופית, וניקח $\phi\neq O\in\alpha$ וגם $x_k\in O_{i_k}$ ואז $\{O,O_{i_1},\ldots,O_{i_n}\}\subset\alpha$ תת–כיסוי סופי.

5. <u>משפט 3</u>: (תורשתיות של Comp לגבי תת–קבוצות סגורות)

נניח X קומפקטי, $Y\subseteq X$ סגור. אזי Y קומפקטי.

<u>הוכחה</u>:

נניח $\alpha=\{O_i\}_{i\in I}$ כיסוי פתוח של Y ב–X (לא בהכרח כיסוי של X). נגדיר $\alpha^*=\alpha\cup Y^C$.

α^* כיסוי (פתוח–כי Y סגור ואז Y^C פתוח ב–X) של X. X קומפקטי ולכן יש תת–כיסוי סופי שלו, $\gamma\subset\alpha^*$. אם Y^C נמצא ב–γ אזי ניקח אוסף אחרי השמטת Y^C מ־γ. עדיין נקבל אוסף סופי שמכסה את Y. זהו עדיין תת–אוסף של α שמכסה את Y (שהרי האיחוד שלו עם Y^C כיסה את כל המרחב, ו–$Y^C\cap Y=\phi$). לפי קריטריון קומפקטיות לתת–קבוצות סיימנו.

■

טופולוגיה - הרצאה 12

ליאור פולק

29 במאי 2016

תזכורת: כל קבוצה סגורה במרחב קומפקטי היא (תת) מרחב קומפקטי.

הערה: סגירות היא חשובה! לדוגמה, $(0,1)\subset[0,1]$ אבל $(0,1)$ לא קומפקטית (מהכיסוי הפתוח $\left(\frac{1}{n},1\right)$ שאין לו תת-כיסוי סופי, או מהומיאומורפיזם ל-$\mathbb{R}$ שאינו קומפקטי שכן אינו חסום)

משפט 1: (משפט ההפרדה)

במרחב שהוא T_2, לכל זוג של תת קבוצות קומפקטיות יש סביבות (פתוחות) זרות.

הערה: ב-T_2 אפשר להפריד נקודות. המטרה היא להפריד קבוצות קומפקטיות.

הוכחה:

1. נניח $A=\{a\}$. נפעיל T_2 עבור a ועבור $b\in B$ כלשהו (לכל B). לכן יש סביבה פתוחות וזרות $v_b\in N(b), u_b\in N(a)$ כך ש-$u_b\cap v_b=\phi$. $\{v_b|b\in B\}$ כיסוי פתוח של B שהיא קומפקטית ולכן יש תת-כיסוי סופי. ז"א יש $\{b_k\}_{k=1\dots n}\subseteq B$ כך ש-$B\subseteq V=\bigcup\limits_{i=1}^{n}v_{b_i}$, וכן $V\in N(B)$ סביבה פתוחה. נגדיר $U=\bigcap\limits_{i=1}^{n}u_{b_i}\in N(A)$ שהיא סביבה פתוחה, ואז $U\cap V=\phi$ (שכן $\phi=u_{b_i}\cap v_{b_i}$), כדרוש.
2. במקרה הכללי, לפי 1, $\forall a\in A\ \exists u_a\in N(a), v_a\in N(B): u_a\cap v_a=\phi$
זהו בעצם אותו התהליך כמו ב-1 לכל $b\in B$ כדי למצוא u_a,v_a לכל $a\in A$, ועם כל ה-u_a,v_a לכל $a\in A$ נפריד את הקבוצות A,B כמו שב-1 הפרדנו את a,B.
אם כן $\{u_a|a\in A\}$ כיסוי פתוח של A שהיא קבוצה קומפקטית במרחב טופולוגי, לכן נקבל שיש תת-כיסוי סופי, דהיינו יש $A\subseteq\{a_k\}_{k=1\dots n}$ כך ש-$A\subseteq U=\bigcup\limits_{i=1}^{n}u_{a_i}\in N(a)$. נגדיר $V=\bigcup\limits_{i=1}^{n}v_{a_i}\in N(B)$ וכך $U\cap V=\phi$ (שכן $\phi=u_{a_i}\cap v_{a_i}$), כדרוש.

■

הערה: שיטת ההוכחה במשפט (שימוש בקומפקטיות ע"מ להפריד) נקרא Standard Compactness Argument [לכל $a\in A$ מגדירים לכל $b\in B$ את u_b,v_b. מאיחודים וחיתוכים עם קומפקטיות מגדירים u_a,v_a ואז עם איחודים את U,V]

משפט 2: (משפט הסגירות)

נניח $X\in T_2$ ו-Y תת-מרחב טופולוגי. אם Y קומפקטי אזי הוא סגור ב-X.

הוכחה: לכל $a\notin Y$ מפעילים את משפט ההפרדה עבור $A=\{a\}, B=Y$. נקבל קבוצות פתוחות וזרות $u_a\in N(a),\ v_a\in N(B)$ כך ש-$u_a\cap v_a=\phi$. לכן $Y^c=\bigcup\limits_{a\in Y^c}u_a\in\tau$ ולכן Y^c פתוח ומכאן, Y סגור.

■

משפט 3: (משפט הנורמליות)

כל מרחב קומפקטי והאוסדורפי הוא נורמלי (ז"א, $\mathrm{Comp}_2 = \mathrm{Comp} \cap T_2 \subset T_4$).

הוכחה: נניח $X \in \mathrm{Comp} \cap T_2$. צ"ל $X \in T_1$ ושלכל שתי קבוצות סגורות זרות יש סביבות זרות.

אבל $X \in T_2$ גורר $X \in T_1$, וממשפט הסגירות, קבוצה סגורה במרחב קומפקטי היא גם קומפקטית. לכן נקבל ששתי הקבוצות הסגורות הן קומפקטיות וזרות ומותר להשתמש במשפט ההפרדה.

■

לסיכום: $T_4 \subset T_3 \subset T_2 \subset T_1 \subset T_0 \begin{cases} \mathrm{Metriz} & \subset \\ \mathrm{Comp} \cap T_2 & \subset \end{cases}$

משפט 4: (סגירות פונקציות)

כל פונקציה רציפה $f : \underbrace{X}_{\in \mathrm{Comp}} \to \underbrace{Y}_{\in T_2}$ היא פונקציה סגורה.

הוכחה: צ"ל $f(A)$ סגור לכל A שסגור ב-X.

X קומפקטי והרי קבוצה סגורה במרחב קומפקטי היא קומפקטית $\Leftarrow$ A קומפקטית. אבל אז גם $f(A)$ קומפקטית כי קומפקטיות נשמרת תחת העתקה רציפה (לפי המשפט שיבוא תכף). נקבל $f(A) \subset Y \in T_2$ ולפי משפט הסגירות, $f(A)$ קומפקטית $\Leftarrow$ $f(A)$ סגורה ב-Y.

■

משפט 5: קומפקטיות נשמרת ע"י תמונה רציפה.

הוכחה: נניח $f(X) = Y$ עבור איזשהן שתי תתי-קבוצות של מרחבים טופולוגיים כלשהם, כאשר f רציפה. צ"ל Y קומפקטית. נניח $\alpha = \{O_i\}_{i \in I}$ כיסוי פתוח ל-Y.

אזי $\{f^{-1}(O_i)\}_{i \in I}$ כיסוי ל-X (תמיד!). זהו כיסוי פתוח שכן f רציפה. אבל X קומפקטי ולכן יש לו תת-כיסוי סופי, $X \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(O_i)$.

תמונה שומרת על איחוד ולכן נקבל $Y = f(X) = f\left(\bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(O_i)\right) = \bigcup_{k=1}^{n} f \circ f^{-1}(O_i) = \bigcup_{k=1}^{n} O$ ולכן יש תת-כיסוי סופי ל-Y.

■

משפט 6: (על השיכון והומיאומורפיזם)

נניח X קומפקטי ו-$Y \in T_2$. נניח שיש $f : X \to Y$ רציפה וחח"ע. אזי f היא **שיכון טופולוגי** (ז"א, הצמצום $f_0 : X \to f(X)$ הוא הומיאומורפיזם)

הוכחה: למעשה זה שקול להוכיח ש-$f_0 : X \to f(X)$ היא הומיאומורפיזם, ומספיק ש-f_0^{-1} תהיה רציפה.

זה שקול להוכיח שמקור של קבוצה סגורה- סגור.

זה שקול להוכיח שהתמונה $f(A)$ סגורה לכל A שסגור ב-X [כי לכל A סגורה בטווח של f_0^{-1} (שהוא X), צ"ל שהמקור $(f_0^{-1})^{-1}(A) = f_0(A)$ יהיה סגור].

אבל זה מובטח לנו עקב משפט הסגירות של הפונקציה (שהרי f_0 סגורה).

■

הגדרה 1: נניח (X,τ) מ"ט, Y קבוצה לא ריקה ונתונה פונקציה על, $f:X\to f(X)=Y$.

נגדיר $\sigma=\{A\subseteq Y|f^{-1}(A)\in\tau\}$. אזי σ היא **טופולוגיית המנה** על Y.

מתקיים:

1. (Y,σ) מ"ט.
2. f רציפה.
3. אם σ^* טופולוגיה על Y כך ש-f רציפה, אזי $\sigma^*\subseteq\sigma$ (σ היא הטופולוגיה החזקה ביותר המבטיחה את רציפות f).

הגדרה 2: נניח $(Y,\tau_Y),\quad(X,\tau_X)$ מ"ט, $f:X\to Y=f(X)$ על. הפונקציה f נקראת **פונקציית המנה** אם $\sigma=\tau_Y$ (מההגדרה הקודמת).

זה שקול לכך ש-$f^{-1}(A)\in\tau_X\Leftarrow A\in\tau_Y$.

טענה: פתיחות (או סגירות) של פונקציה רציפה ועל הן תכונות מספיקות לפונקציית המנה.

הסבר:

1. פתיחות- נניח $f^{-1}(A)\in\tau_X$, f על ולכן $f\circ f^{-1}(A)=A$. f פתוחה אזי A פתוחה ($A\in\tau_Y$).
2. סגירות- אותו הדבר, עם משלימים.

מסקנה: נניח X קומפקטי ו-$Y\in T_2$. נניח שיש $f:X\to Y$ רציפה ועל. אזי f פונקציית המנה.

הוכחה: משפט הסגירות של פונקציה, והטענה הקודמת.

משפט 7: נניח $(X,\sigma)\in T_2\quad(X,\tau)\in\mathrm{Comp}$, $\sigma\subseteq\tau$. אזי $\sigma=\tau$.

הוכחה: ניקח את הזהות בין שני המרחבים, שהיא פונקציה רציפה ועל. לפי משפט על השיכון (הומיאומורפיזם), נקבל ש-f הומיאומורפיזם, דהיינו $\sigma=\tau$.

■

דוגמה: ב-$X=[0,1]$ לא קיימת טופולוגיות T_2 שהן חלשות ממש מהטופולוגיה הרגילה.

תזכורת: מ"ט X הוא **קומפקטי סדרתית** ונסמן $X\in\mathrm{SComp}$ אם לכל סדרה $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ב-X, יש תת-סדרה $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ שמתכנסת ב-X.

משפט 8: SComp נשמרת ע"י תמונה רציפה.

הוכחה: נניח $f:X\to Y=f(X)$ פונקציה רציפה, כך ש-$X\in\mathrm{SComp}$.

נניח $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרה ב-Y. נמצא לה ת"ס מתכנסת.

f על ולכן יש $x_n\in X$ כך ש-$f(x_n)=y_n$. $X\in\mathrm{SComp}$ ולכן יש ת"ס $\{x_{n_k}\}$ המתכנסת ב-X. רציפות שומרת על התכנסות ולכן $\{f(x_{n_k})=y_{n_k}\}$ היא סדרה המתכנסת ב-Y, והיא ת"ס של $\{y_n\}$.

■

הערה: נוכיח בהמשך כי מתקיים $\mathrm{Comp} \cap \mathrm{Metriz} = \mathrm{SComp} \cap \mathrm{Metriz}$.

תזכורת: אם (X,d) הוא מ"מ קומפקטי, אזי d חסומה (ואפילו כליל), וזהו מרחב שלם.

משפט 9: (הכללת משפט ויירשטראס)

נניח X מרחב קומפקטי ונתונה פונקציה רציפה $f : X \to \mathbb{R}$. אזי f חסומה ומקבלת $\max, \min$.

הוכחה: תמונה רציפה שומרת על קומפקטיות, ולכן $f(X)$ קומפקטי ב-$\mathbb{R}$. $f(X)$ חסום לפי התזכורת (שכן הוא קומפקטי, ולכן חסום).

מתקיים ש-$f(X) \subset \mathbb{R} \in T_2$ $\mathrm{Comp} \ni$ (שכן $\mathbb{R}$ מטריזבילי), וממשפט הסגירות $f(X)$ סגור ב-$\mathbb{R}$.

מהחסימות של $f(X)$ נקבל שקיימים $M = \sup\{f(X)\}, m = \inf\{f(X)\}$. תמיד $m, M \in f(X)$, אבל $f(X)$ סגור ולכן $f(X) = \overline{f(X)}$.

($\sup, \inf$ הם דוגמה טובה לנקודה שנמצאת בסגור- בכל סביבה שלהם בטווח יש איברים מהקבוצה, ולכן יש חיתוך לא ריק עם הקבוצה- ולכן הם בסגור).

לכן $\inf, \sup$ מתקבלים ע"י f, והם בעצם $\min, \max$.

■

תרגיל: הוכח שהמשפט נכון גם עבור SComp.

תרגיל: משפטי הסגירות- תנו דוגמות נגדיות אם אין קומפקטיות.

רמז:

1. $(\mathbb{R}, \tau_{disc}) \xrightarrow{Id} \mathbb{R}$
2. $\mathbb{C} \supset \mathbb{T} = \mathbb{S} \to [0,1)$ ע"י $f(t) = e^{2\pi i t}$. f רציפה, חח"ע ועל אבל לא סגורה ולא פונקציית המנה.

תודה לטל קיאני וליאור רבקין על כתיבת סיכום הרצאה זו והרשות להשתמש בו

.

טופולוגיה - הרצאה 14

ליאור פולק

19 ביוני 2016

<u>תרגיל:</u> נניח (X,d) מ"מ, $A,K\subseteq X$ לא ריקות, K קומפקטית.

1. קיימת נקודה $x_0\in K$ כך ש-$d(K,A)=d(x_0,A)$
2. אם גם A קומפקטי אזי קיימת נקודה $a_0\in A$ כך ש-$d(K,A)=d(x_0,a_0)$

<u>פתרון:</u>

1. נגדיר פונקציה $f:K\to\mathbb{R}$, $f(x)=d(x,A)$. זוהי פונקציה רציפה שכן היא צמצום של פונקציית ליפשיץ על X. K קבוצה קומפקטית, ולכן לפי משפט ויירשטראס נקבל ש-f מקבלת מינימום ב-K, דהיינו קיימת $x_o\in K$ כך ש-$\min f(K)=f(x_0)=d(x_0,A)$ וזהו $d(K,A)$ לפי ההגדרה.
2. נשתמש ב-1 כאשר $\varphi:A\to\mathbb{R}$, $\varphi(x)=d(x,x_0)$, $A:=\{x_0\}$, $K:=A$.

<u>דוגמות נגדיות:</u> (קומפקטיות חשובה, סגירות לא מספיקה)

1. ב-$\mathbb{R}$, $B=\left\{n+\frac{1}{2n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}\quad A=\mathbb{N}$. אזי המרחק ביניהם הוא אפס, אבל לא מתקבל ע"י מרחק בין נקודות!
2. ב-$\mathbb{R}^2$, ניקח את הגרף של $f(x)=\frac{1}{x}$ ברביע הראשון להיות A ואת ציר ה-y להיות B. אזי המרחק ביניהם הוא אפס, אבל לא מתקבל ע"י מרחק בין נקודות!

<u>הערה:</u> נוכיח בהמשך את משפט Tychonoff

<u>משפט 1:</u> (Tychonoff)

מכפלה טופולוגית $X:=\prod\limits_{i\in I}X_i$ היא קומפקטית $\iff$ X_i קומפקטי $\forall i\in I$.

<u>כיוון אחד פשוט:</u> $\Leftarrow$

אם X קומפקטי אזי $X\overset{\pi_i}{\to}X_i$, ואז כל X_i הן תמונות רציפות של X (והרי הוכחנו שקומפקטיות נשמרת תחת תמונה רציפה).

<u>משפט 2:</u> נניח (X,d) מ"מ קומפקטי. אזי קיימות $a,b\in X$ כך ש-$\operatorname{diam}(X)=d(a,b)$.

<u>הוכחה:</u>

ננצל את משפט Tychonoff על מרחבי מכפלה טופולוגיים.

$$\operatorname{diam}(X)=\sup\{d(x,y)|x,y\in X\}$$

לפי משפט Tychonoff, X^2 הוא קומפקטי. לכן $d:X^2\to[0,\infty)\subset\mathbb{R}$ רציפה.

לפי משפט ווירשטראס, d מקבלת מקסימום ב-X^2, ז"א יש $a,b\in X$ כך ש-$\max\{d(x,y)|x,y\in X\}=d(a,b)$.

זהו $\operatorname{diam}(X)$ לפי הגדרה.

■

<u>משפט 3</u>: נניח $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה. אזי $f[a,b]=[c,d]$, דהיינו התמונה היא קטע סגור.

<u>הוכחה</u>: בגלל משפט ערך הביניים, $f[a,b]$ הוא איזשהו קטע. בגלל משפט אחר, $f[a,b]$ הוא קומפקטי.
קטע קומפקטי ב-$\mathbb{R}$ הוא רק קטע סגור, $[c,d]$.

■

<u>הגדרה 1</u>: נניח $\alpha=\{A_i\}_{i\in I}$ אוסף תת-קבוצות בקבוצה X.

1. $\alpha\in \text{IP} \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{i\in I} A_i\neq\phi$
2. $\alpha\in \text{FIP} \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{j\in J} A_j\neq\phi$ לכל $J\subseteq I$ סופית.

Finite Intersection Property=FIP.

תמיד $1 \Leftarrow 2$ אבל לא תמיד $2 \Rightarrow 1$. למשל: $A_n=\{n,n+1,\ldots\}$. אזי $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in \text{FIP}\backslash\text{IP}$.

<u>דוגמה</u>: לכל סדרה יורדת $A_1\supseteq A_2\supseteq A_3\ldots$ של קבוצות לא ריקות, $\alpha=\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ היא FIP תמיד (אבל לא תמיד IP).

<u>משפט 4</u>: התנאים הבאים שקולים:

1. $X\in\text{Comp}$ (לכל כיסוי פתוח יש תת-כיסוי סופי)
2. לכל אוסף $\alpha=\{A_i\}_{i\in I}$ של תת-קבוצות סגורות עם תכונת FIP בהכרח מתקיים תכונת IP (דהיינו $\text{FIP}\Rightarrow\text{IP}$)

<u>הוכחה</u>: שילוב של הגדרת הקומפקטיות והתכונות- $\{O_i\}$ כיסוי של X $\iff$ $\{O_i^c\}\not\ni\text{IP}$.

<u>דוגמות</u>:

1. $\ldots[2,\infty)\subset[1,\infty)$ עם תכונת FIP אך לא IP ולכן $\mathbb{R}$ איננו מרחב קומפקטי!
2. <u>תרגיל</u>: הוכיחו "בדרך FIP" שכל מ"מ קומפקטי הוא חסום.
3. ב-$X=[0,1]\not\ni\text{Comp}$, $A_n=\{\frac{1}{n},\frac{1}{n+1}\ldots\}$ הן סגורות ב-X, בעלות תכונת FIP אך לא IP.

<u>הערה</u>: משפט FIP + משפט Cantor (קריטריון השלמות) יביאו לנו עוד הוכחה למשפט הבא:

<u>משפט 5</u>: אם מ"מ (X,d) הוא קומפקטי אזי הוא שלם.

<u>משפט 6</u>: (Heine-Borel)

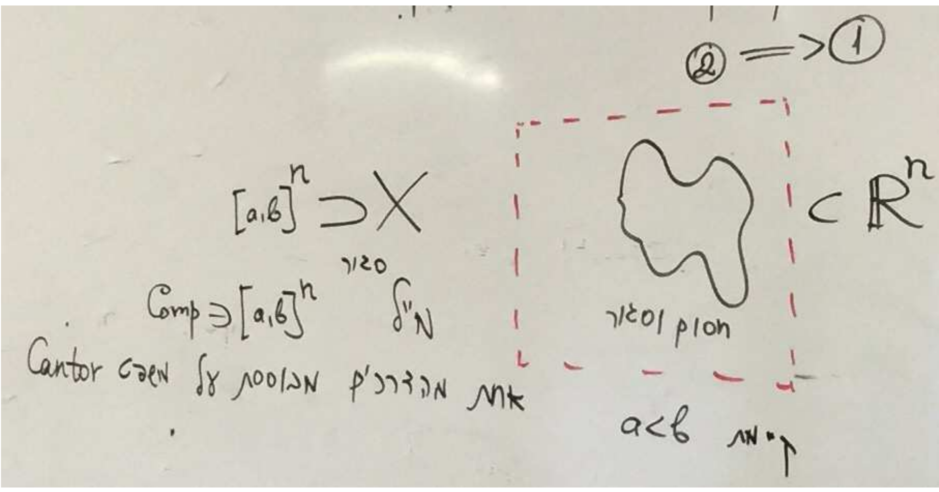
נניח $X\subseteq\mathbb{R}^n$. התנאים שקולים:

1. $X\in\text{Comp}$
2. X חסום וסגור

<u>הוכחה</u>:

$1\Leftarrow 2$ הוכחנו- $(X,d)\in\text{Comp} \Leftarrow (X,d)$ חסום, $X\subset Y\in T_2$ קומפקטי $\Leftarrow X$ סגור ב-Y.

$2\Leftarrow 1$



נניח בשלילה ש-$K=[a,b]^n$ לא קומפקטית. אזי קיים אוסף $\alpha=\{O_i\}_{i\in I}$ של קבוצות פתוחות ב-$\mathbb{R}^n$ כך ש-α מכסה את K, אבל אין תת-כיסוי סופי של α המכסה את K. נחלק את ההיפר-קובייה K ל-2^n תת-קוביות (באופן סימטרי).

אזי יש מספר סופי של תת-קוביות, ולכן לפחות אחת מהן היא "הבעייתית", בה"כ K_1, כך שאף תת-אוסף של α לא מכסה את K_1.

נמשיך כך לקבלת סדרה יורדת של תתי-קוביות $K\supseteq K_1\supseteq K_2\dots K_m$ שהן קבוצות סגורות, כאשר כל אחת מהן "בעייתית".

נשים לב- $\underbrace{\frac{b-a}{2^m}}_{\to 0}\geq \operatorname{diam}K_m \geq 0$, ולכן $\operatorname{diam}K_m\to 0$.

נפעיל את Cantor לקבלת $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} K_m\neq\phi = \{c\}$. $c\in K$ ולכן קיים $c\in O_{i_0}\in\alpha$. O_{i_0} פתוחה ולכן יש סביבה של c בתוכה.

בתוך סביבה זו יש איזושהי K_m עבור m מספיק גדול. קיבלנו $K_m\subset O_{i_0}$, מכוסה ע"י איבר אחד מ-α. זוהי סתירה לכך שכל K_m האלו בעייתיות.

■

הערה: חסום וסגור בדר"כ לא מספיק לקומפקטיות (אם לא נמצאים ב-$\mathbb{R}^n$).

דוגמות:

1. $A\subset(X,d_\Delta)$, כאשר d_Δ היא המטריקה הדיסקרטית. כל תת-קבוצה היא חסומה וסגורה, אבל A לא קומפקטי עבור כל A אינסופי.

תזכורת: $(X,\tau_{\text{disc}})\in\text{Comp}\iff X$ סופית.

2. $X=\ell_2\overset{i}{\hookleftarrow}(\mathbb{N},d_\Delta)$ (שיכון איזומטרי), $n\mapsto e_n$, $i(\mathbb{N})=\{e_1,e_2,\dots\}$

תרגיל: ℓ_2 לא קומפקטי מקומית. (לתוך כל כדור סגור "לחסום" תת-קבוצה סגורה, אינסופית דיסקרטית)

תרגיל: $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}=\mathbb{R}^{\aleph_0}$ לא קומפקטי מקומי (אבל! $\mathbb{R}^n$ כן קומפקטי מקומית)

רמז: כל סביבה (עפ"י הגדרת טופולוגית המכפלה) מכילה תיבה בסיסית, $u=A_1\times A_2\dots A_n\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

אזי $\pi_{n+1}(u)=\mathbb{R}\notin\text{Comp}$, ומכאן $u\notin\text{Comp}$.

<u>משפט 7</u>: (קומפקטיות במ"מ)

נניח (X,d) מ"מ. התנאים שקולים:

1. $X \in \mathrm{Comp}$
2. $X \in \mathrm{SComp}$ (לכל סדרה יש תת-סדרה מתכנסת)
3. $X \in \mathrm{BW}$ (תכונת בולצאנו-ויירשטראס: לכל קבוצה אינסופית יש נקודת הצטברות)
4. (X,d) שלם וחסום כליל

<u>הוכחה</u>:

$1 \Leftarrow 4$

הרעיון הוא חיקוי של הוכחת משפט Heine-Borel.

בשלילה $X \notin \mathrm{Comp}$. אזי קיים $\alpha = \{O_i\}_{i\in I}$ כיסוי המורכב מקבוצות פתוחות ב-X כך שאף תת-כיסוי סופי לא מכסה את X.

אבל (X,d) חסום-כליל ולכן עבור כל $\epsilon > 0$ יש הצגה $X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n$, כאשר כולן סגורות ב-$X$ וגם $\mathrm{diam}(X_i) < \epsilon$. זה נכון גם עבור תתי-מרחבים של X (חסום כליל זה תורשתי).

לפחות אחד מה-X_i הוא בעייתי. ניקח $\epsilon = 1$. בחלוקה מתאימה לפחות אחד $K_1 = X_i$. עבור $\epsilon = \frac{1}{2}$ יש חלוקה דומה של K_1 (שהרי אף הוא חסום-כליל). נמשיך כך ובעזרת היינה-בורל (וקצת קנטור) נקבל את הדרוש.

$2 \Leftarrow 1$

נניח בשלילה ש-$X \notin \mathrm{SComp}$. אזי יש סדרה $\{x_n\}$ ב-X ללא ת"ס מתכנסת.

נגדיר $\{x_n, x_{n+1} \ldots\} = A_n \neq \phi$. ברור כי $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{FIP}$.

נשים לב-A_n סגורות מכיוון ש:

1. במ"מ $\mathrm{cl}(A) = \mathrm{scl}(A)$. לכן כדי להוכיח סגירות נוכיח $\mathrm{scl}(A) = A$ - אם בשלילה A_n לא סגורה, אזי $\mathrm{scl}(A_n) \neq A_n$, ויש סדרה ב-$A_n$ שלא מתכנסת ב-A_n. אבל סדרה ב-A_n היא תת-סדרה של $\{x_n\}$ עד כדי פרמוטציה!
2. פרמוטציות של סדרות (דהיינו, שינוי סדר האיברים) שומרת על ההתכנסות. לכן, אם יש סדרה מתכנסת ב-A_n, אזי בה"כ ניתן להניח כי הסדרה היא ת"ס של $\{x_n, x_{n+1} \ldots\}$.

בגלל 1, $X \in \mathrm{Comp}$. לפי משפט FIP, נקבל $\exists c \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \phi$.

לכן, $\{c, c, c \ldots\}$ היא ת"ס של $\{x_n\}$, והיא קבועה ולכן מתכנסת. זאת בסתירה להנחה שאין לנו ת"ס מתכנסת!

$2 \Leftarrow 3$ נניח $A \subseteq X$ אינסופית. אזי קיימת סדרה $a_n \in A$ עם איברים שונים. מהנתון ב-2 ($X \in \mathrm{SComp}$) נקבל שיש ת"ס מתכנסת, $\{a_{n_k}\}$.

אזי $a_{n_k} \overset{X}{\to} z$ ולפי המיון של נקודות הצטברות במ"מ, נקבל $z \in A' \neq \phi$ כדרוש.

טופולוגיה - הרצאה 15

ליאור פולק

24 ביוני 2016

<u>משפט 1</u>: בהינתן מרחב מטרי (X,d) התנאים הבאים שקולים:

1. המרחב קומפקטי, $(X,d)\in Comp$
2. המרחב קומפקטי סדרתית, $(X,d)\in SComp$
3. המרחב הוא מרחב בולצאנו ויירשטראס, $(X,d)\in BW$
4. המרחב שלם וחסום כליל

הוכחנו כבר את הגרירות $4\to 1\to 2\to 3$. נוכיח $3\to 2\to 4$:

<u>$2\Leftarrow 3$</u>

נניח $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה ב-X. נוכיח שיש לה ת"ס מתכנסת, בהינתן שהמרחב הוא מרחב בולצאנו ויירשטראס.

נסמן $A=\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}\subset X$. אם A סופית, אז יש בה איבר שמופיע אינסוף פעמים, נניח $\exists x \mid \forall i\in\mathbb{N}: \quad a_{n_i}=x$

אז x_{n_i} היא תת סדרה מתכנסת. נניח אם כך ש-A אינסופית. זה אומר $\exists z\in A'\neq\phi$.

ממשפט המיון לנק' הצטברות במ"מ, יש סדרה מA עם איברים שונים שמתכנסת לz. התכנסות נשמרת על ידי פרמוטציות, לכן אפשר "לסדר מחדש" את איברי הסדרה הזו כך שתהיה תת סדרה של x_n - וזוהי תת הסדרה המתכנסת המבוקשת.

<u>$4\Leftarrow 2$</u>

<u>שלמות</u>: צ"ל שכל סדרת קושי x_n מתכנסת. $X\in SComp$ לכן קיימת תת סדרה מתכנסת x_{n_k} אבל אז גם הסדרה המקורית מתכנסת לפי משפט.

<u>חסימות כליל</u>: נניח בשלילה שלא. אזי קיים $\varepsilon_0>0$ כך שלא קיימת תת קבוצה **סופית** שהיא ε_0 צפופה. יהיה מספיק להוכיח שקיימת סדרה ללא ת"ס מתכנסת. בפרט, יהיה מספיק להוכיח שקיימת סדרה x_n כך ש$d(x_i,x_j)\geq\varepsilon_0 \quad \forall i,j:$. יהיה ברור שסתרה כזו לא מכילה ת"ס קושי אבל כל סדרה מתכנסת היא קושי. נבנה את x_n: יהי x_1 כלשהו בX. מתקיים $X\neq B(x_1,\varepsilon_0)$, אחרת $\{x_1\}$ הייתה ε_0 צפופה, לכן ניתן לקחת $x_2\notin B(x_1,\varepsilon_0)$. בדומה ניתן להמשיך, ואם יש לנו את האיברים $x_1,\dots,x_n$ אז $X\neq\bigcup_{i=1}^{n}B(x_i,\varepsilon_0)$ ולכן ניתן לקחת $x_{n+1}\in X\setminus\bigcup_{i=1}^{n}B(x_i,\varepsilon_0)$ שיקיים $d(x_{n+1},x_i)\geq\varepsilon_0$ וסיימנו.

$\blacksquare$

1 מספר לבג (Lebesgue) ורציפות במ"ש

<u>הגדרה 1</u>:

1. נניח α, β זוג אוסף תת קבוצות בX. אומרים כי β עידון של α, או β מעדנת את α, ונסמן $\beta \prec \alpha$, אם $\forall B \in \beta | \exists A \in \alpha : B \subseteq A$.
2. אומרים ש-α הוא δ-אחיד אם $\{B(x,\delta)\}_{x\in X} \prec \alpha$, ואז ברור ש$\alpha$ הוא גם כיסוי.
3. δ נקרא מספר לבג של α אם α הוא δ אחיד. נשים לב שאז לכל $0 \lneq \delta_1 \leq \delta$ גם מתקיים ש-δ_0 מספר לבג של α.
דוגמאות:

() י

i. אם $\alpha = \{B(x,\delta)\}$ אז מס' L קיים (למשל δ).
ii. δ מס' L של $\alpha \iff \ diam(A) < \delta \Rightarrow \{A\} \prec \alpha \iff \{A \subseteq X \mid diam(A) < \delta\} \prec A$.
iii. נשים לב שלמשל עבור הכיסוי הפתוח $\alpha := \left\{A_n = \left(\frac{1}{n}, 1\right)\right\}$ אין מספר לבג ־ שכן אם נניח ש$0 < \delta < 1$ הוא מספר לבג אז נתבונן ב-$B\left(\frac{\delta}{2}, \delta\right) = \left(0, \frac{3\delta}{2}\right)$, שלא מוכל באף A_n ־ ז"א δ אינו מספר לבג לכל δ.

<u>משפט 2</u>: (לבג) (או, לפי ויקיפדיה, "למת המספר של לבג" "Lebesgue's Number Lemma")

יהי (X,d) קומפקטי. אזי לכל כיסוי פתוח יש מספר לבג.

<u>הוכחה</u>: נניח $\alpha = \{u_i\}_{i\in I}$ כיסוי פתוח. המרחב קומפקטי, לכן יש תת כיסוי סופי $u_1, u_2, \ldots, u_n$ (בה"כ אלו הn הראשונים).
נגדיר $f_k(x) := d(x, u_k^c) \in Lip_1$, שהיא פונקציה רציפה. עוד נגדיר $f(x) = \max\limits_{1\leq k\leq n} f_k(x)$ (מקסימום של פונקציות רציפות הוא רציף - $max\{\varphi_1,\varphi_2\} = \frac{\varphi_1+\varphi_2+|\varphi_1-\varphi_2|}{2}$ ולכן באינדוקציה [על מה שרוצים, באמת] גם מקסימום של n רציפות הוא רציף).

נשים לב: $f(x) > 0 \quad | \forall x \in X$, כי $x \in u_k$ ואז $f_k(x) > 0$ – אחרת $d(x, u_k^c) = 0$, ואז $x \in \bar{u_k^c} \overset{=}{\text{close}} u_k^c$ בסתירה להנחה.
נקבל $f(x) \geq f_k(x) > 0$ ולכן $f(x) > 0$.

נקבל ממשפט ויירשטראס ש- $\delta \equiv \min f = f(x_0) > 0 \mid \exists x_0$. נוכיח כי δ זו מתאימה להיות מספר לבג של α. מספיק להוכיח שδ הוא מספר לבג של תת הכיסוי הסופי $\{u_k\}$, כלומר ש $\forall x \exists k \mid B(x,\delta) \subseteq u_k$. זה מתקיים מפני שעבור $x \in X$ נתון יש k_x כך ש$f(x) = f_k(x)$, $x \in u_k$ ואז $B(x,\delta) \subseteq u_k$ כי אחרת היה מתקיים $f(x) = d(x, u_k^c) < \delta$ בסתירה להגדרת מינימום.

■

<u>משפט 3</u>: (רציפות במ"ש)

יהיו $(X,d), (Y,\rho)$ מ"מ. תהי $f : X \to Y$ רציפה. עוד נניח $(X,d) \in Comp$. אזי f רציפה במ"ש.

<u>הוכחה</u>: אנחנו רוצים להוכיח שמתקיים $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid diam(A) < \delta \Rightarrow diam(f(A)) \leq \varepsilon$. עבור ε נתון, ניקח $\frac{\varepsilon}{2}$-כיסוי של Y $\left\{B(y,\frac{\varepsilon}{2}) \mid y \in Y\right\}$. f רציפה, לכן $\alpha = \left\{f^{-1}\left(B(y,\frac{\varepsilon}{2}\right) \mid y \in Y\right\}$. ממשפט לבג, קיים מספר לבג $\delta > 0$ עבור α. נראה שזהו δ שמתאים להגדרת רציפות במ"ש – אם $diam(A) < \delta$, $\phi \neq A \subseteq X$ אז $\{A\} \prec \{B(x,\delta)\}_{x\in X} \prec \alpha$ (השמאלי מהגדרת קוטר, הימני מהגדרת מספר לבג). נקבל $\{f(A)\} \prec f(\alpha) = \left\{B\left(y,\frac{\varepsilon}{2}\right) \mid y \in Y\right\}$ ומכאן נקבל $diam f(A) \leq 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

■

2 משפט טיכונוף

$\left(\prod\limits_{i\in I} X_i, \tau_\pi\right)$ קומפקטי $\iff$ $\forall i \in I\ (X_i, \tau_i) \in Comp$.

$\Leftarrow$

תמונה רציפה שומרת על קומפקטיות, ולכל i ההטלה $\pi_i : \prod\limits_{i\in I} X_i \to X_i$ רציפה ועל (כמו שכבר ראינו).

$\Rightarrow$ נשתמש בלמה של אלכסנדר (שהוכחתה דורשת את הלמה של צורן) ללא הוכחה:

<u>למה</u>: (הלמה של אלכסנדר)

התנאים הבאים שקולים:

1. המ"ט X קומפקטי
2. לכל כיסוי פתוח שמורכב מקבוצות פתוחות של תת בסיס יש כיסוי סופי

נשתמש בלמה של אלכסנדר עבור תת הבסיס הסטנדרטי - $\beta = \{\pi_i^{-1}(O_i) \mid O_i \in \tau_i\}$.

בשלילה, המכפלה $\prod\limits_{i\in I} X_i$ לא קומפקטית. אז לפי הלמה יש כיסוי בעייתי $C \subseteq \beta$, $C = \bigcup\limits_{i\in I} C_i$ כאשר C_i היא אוסף כל הקבוצות בC שעבורן X_i הוא המרחב ממנו נלקחה הקבוצה שאינה כל המרחב.

לפי ההנחה, C_i לא מכיל תת כיסוי סופי של X ולכן $\pi_i(C_i)$ לא מכיל תת כיסוי סופי של X_i.

לכן הוא אינו כיסוי– אם הוא היה כיסוי היינו מקלים סתירה לקומפקטיות של X_i.

מכאן, לכל $i \in I$ יש נקודה $x_i \in X_i$ שלא מכוסה ע"י $\pi_i(C_i)$. א

ם כך, ה"וקטור" $x := (x_i)_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} X_i$ לא מכוסה ע"י C - בסתירה לעובדה שC כיסוי.

■

עקומת פאנו

משפט 4: קיימת עקומת פאנו, פו' רציפה ועל מקטע היחידה לקטע היחידה בריבוע.

הוכחה: (בנייה מפורשת)

שלב א':

קבוצת קנטור K הומאומורפית למרחב $\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, d\right) \simeq \left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \tau_\pi\right) \simeq K \subset [0,1]$.

שלב ב':

$K \simeq K^2 \simeq K^n$, נובע מהעובדה $K \simeq \left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, d\right)$.

שלב ג':

יש פונקציה רציפה ועל מK ל$[0,1]$ - $\varphi\left(\sum \frac{b_k}{3^k}\right) = \sum \frac{b_k}{2} \cdot \frac{1}{2^k}$ (כי הצגה בינארית מכסה את הקטע).

שלב ד':

יש פונקציה רציפה ועל מK לI^2, יש פונקציה רציפה, חח"ע ועל מK לI ולכן סיימנו.

המבחן

1. המבחן **לא** משותף לקבוצות;
2. אין טעם לחפש חיתוך עם הקבוצה השניה;
3. השאלות יהיו דומות, התרגילים יהיו בטווח של התרגולים, די קלות;
4. כל דבר כמעט הוא משפט לכן אין רשימת משפטים אבל לא יהיו משפטים מאוד קשים – לא יהיה משפט טיכונוף, לדוגמה;
5. אם המשפט ארוך יתנו שלב אחד (נניח אם 1 שקול ל2 שקול ל3 שקול ל4 אז יהיה להוכיח גרירה אחת);
6. יהיה בעיקר מההרצאות, שיעורי בית ותרגולים;
7. המבחן יהיה שלוש שעות;
8. כנראה תהיה "שאלת אתגר" - בונוס;
9. יכול להיות תרגיל שלא ראינו - אבל יהיה אפשרי, אולי אפילו סתם שילוב של כמה דברים;
10. מקור אפשרי נוסף הוא קובץ התרגילים באתר של מגרל (שנמצא ממש kan), חלק מופיע בתרגילי הבית, אבל לא הכל. רוב הקובץ ברמה של המבחן, לפעמים יש שאלות ארוכות.
11. ככל הנראה יהיה גם תרגול חזרה.