פתרון תרגיל 2 גיאומטריה אנליטית ודיפרנציאלית תשע"ו

10 במרץ 2016

1. נשתמש בתכונות המכפלה הסקלרית והמכפלה הוקטורית.

(א) מתקיים:

$$\cos\theta = \frac{\langle a,b\rangle}{\|a\|\cdot\|b\|}$$

במקרה שלנו, $\langle a,b\rangle = \frac{25}{2}, \|a\| = \sqrt{14}, \|b\| = \sqrt{\frac{65}{4}}$, ולכן:

$$\cos\theta = \frac{\frac{25}{2}}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{\frac{65}{4}}} = \frac{25}{\sqrt{910}} \approx 0.8287$$

ולכן: $\theta \approx 0.5939$, כלומר $\theta \approx 34.03^o$.

(ב) נחשב את $b\times c$:

$$b\times c = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 4 & \frac{1}{2} \\ 6 & 1 & -4 \end{vmatrix} = i\cdot\left(-\frac{33}{2}\right) - j\cdot(-3) + k\cdot(-24) = \left(-\frac{33}{2}, 3, -24\right)$$

שטח המקבילית הוא:

$$\|b\times c\| = \sqrt{\left(\frac{33}{2}\right)^2 + 3^2 + 24^2} \approx 29.2788$$

2. מתכונות המכפלה הוקטורית, אנו יודעים שהוקטורים מאונכים; אפשר לבדוק שאכן מתקיים:

$$\langle a, a\times b\rangle = \langle b, a\times b\rangle = 0$$

נותר להראות שמתקיים:

$$\|a \times b\| = 1$$

נשתמש בזהות הגיאומטרית:

$$\|a \times b\| = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin \theta$$

מכיוון שהוקטורים a, b אורתונורמליים, $\|a\|, \|b\| = 1$ והזווית ביניהם היא: $\theta = \frac{\pi}{2}$,
ולכן גם: $\sin \theta = 1$.
נקבל בסה"כ שאכן $\|a \times b\| = 1$.

3. נסמן: $a = \left(a^1, a^2, a^3\right)$, ובאופן דומה עבור b, c, d.

(א) מתקיים: $b \times c = \left(b^2c^3 - b^3c^2, b^3c^1 - b^1c^3, b^1c^2 - b^2c^1\right)$.
לכן, הוקטור $a \times (b \times c)$ נראה כך (כל קואורדינטה בשורה נפרדת):

$$\begin{aligned}
(a \times (b \times c))^1 &= a^2 \left(b^1c^2 - b^2c^1\right) - a^3 \left(b^3c^1 - b^1c^3\right) \\
(a \times (b \times c))^2 &= a^3 \left(b^2c^3 - b^3c^2\right) - a^1 \left(b^1c^2 - b^2c^1\right) \\
(a \times (b \times c))^3 &= a^1 \left(b^3c^1 - b^1c^3\right) - a^2 \left(b^2c^3 - b^3c^2\right)
\end{aligned}$$

נפתח סוגריים ונוציא גורם משותף:

$$\begin{aligned}
(a \times (b \times c))^1 &= b^1 \left(a^2c^2 + a^3c^3\right) - c^1 \left(a^2b^2 + a^3b^3\right) \\
(a \times (b \times c))^2 &= b^2 \left(a^3c^3 + a^1c^1\right) - c^2 \left(a^1b^1 + a^3b^3\right) \\
(a \times (b \times c))^3 &= b^3 \left(a^1c^1 + a^2c^2\right) + c^3 \left(a^2b^2 + a^1b^1\right)
\end{aligned}$$

נתבונן, למשל, בקואורדינטה הראשונה:

$$(a \times (b \times c))^1 = b^1 \left(a^2c^2 + a^3c^3\right) - c^1 \left(a^2b^2 + a^3b^3\right) + b^1a^1c^1 - c^1a^1b^1$$

הוספנו וחיסרנו את אותו האיבר. כלומר:

$$(a \times (b \times c))^1 = b^1 \left(a^1c^1 + a^2c^2 + a^3c^3\right) - c^1 \left(a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3\right)$$

ואם כן, קיבלנו:

$$(a \times (b \times c))^1 = b^1 \langle a, c\rangle - c^1 \langle a, b\rangle$$

באופן דומה, נקבל בשתי הקואורדינטות האחרות:

$$\begin{aligned}
(a \times (b \times c))^2 &= b^2 \langle a, c\rangle - c^2 \langle a, b\rangle \\
(a \times (b \times c))^3 &= b^3 \langle a, c\rangle - c^3 \langle a, b\rangle
\end{aligned}$$

ולכן נקבל:

$$a\times(b\times c)=\left(b^1\langle a,c\rangle-c^1\langle a,b\rangle,b^2\langle a,c\rangle-c^2\langle a,b\rangle,b^3\langle a,c\rangle-c^3\langle a,b\rangle\right)$$

ובסה"כ:

$$a\times(b\times c)=\langle a,c\rangle b-\langle a,b\rangle c$$

(ב) נפתח את $\langle a\times b,c\times d\rangle$:

$$\left\langle\left(a^2b^3-a^3b^2,a^3b^1-a^1b^3,a^1b^2-a^2b^1\right),\left(c^2d^3-c^3d^2,c^3d^1-c^1d^3,c^1d^2-c^2d^1\right)\right\rangle$$

נקבל:

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{3}a^ic^ib^jd^j-\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{3}a^id^ic^jb^j$$

נוסיף ונחסר את האיברים $a^ib^ic^id^i$ ונקבל:

$$\sum_{i,j=1}^{3}a^ic^ib^jd^j-\sum_{i,j=1}^{3}a^id^ic^jb^j$$

נפצל את הסכומים:

$$\sum_{i=1}^{3}a^ic^i\sum_{j=1}^{3}b^jd^j-\sum_{i=1}^{3}a^id^i\sum_{j=1}^{3}b^jc^j$$

וזה אכן שווה לביטוי:

$$\langle a,c\rangle\cdot\langle b,d\rangle=\langle a,d\rangle\langle b,c\rangle$$

חשבו איך ניתן להביע זאת באמצעות סימון איינשטיין.

4. בכל אחת מהתבניות נמצא את הע"ע של המטריצה. הצורה הקנונית אינה חד־משמעית, ואפשר להגיע בכל שאלה לצורות שונות.

(א) המטריצה היא:

$$A=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$$

המטריצה כבר אלכסונית. הע"ע הם $1, 2$, ולכן זו אליפסה.
לאחר השלמה לריבוע אפשר לקבל את הצורה הקנונית:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

כאשר $a^2=\frac{9}{8}, b^2=\frac{9}{4}$.

(ב) המטריצה היא:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

הערכים העצמיים הם $2\pm\sqrt{2}$ ולכן זו אליפסה.
הו"ע הם: $\begin{pmatrix} -1\pm\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, לפני נירמול.
לאחר הצבה $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ כאשר P היא המטריצה המלכסנת (אורתוגונאלית) והשלמה לריבוע, מקבלים:

$$\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}=-1$$

כאשר $a^2=\frac{47}{8\left(2+\sqrt{2}\right)}, b^2=\frac{47}{8\left(2-\sqrt{2}\right)}$.
כמובן שאין נקודות במישור שמקיימות את המשוואה, ולכן הגרף הוא ריק (אפשר לקרוא לו "אליפסה דמיונית").

(ג) המטריצה שלנו היא:

$$A=\begin{pmatrix} -\frac{11}{196} & \frac{5\sqrt{3}}{56} \\ \frac{5\sqrt{3}}{56} & -\frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

הערכים העצמיים הם $\frac{-93\pm5\sqrt{2353}}{1568}$, ולכן זו היפרבולה.
הו"ע הם: $\begin{pmatrix} \frac{1\pm\sqrt{2353}}{28\sqrt{3}} \\ 1 \end{pmatrix}$, לפני נירמול.
לאחר הצבה $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ כאשר P היא המטריצה המלכסנת (אורתוגונאלית) והשלמה לריבוע, מקבלים:

$$\left(y'\right)^2=\left(mx'\right)^2$$

כאשר $m^2=\frac{33737+465\sqrt{2353}}{25088}$. אלו שני ישרים.

(ד) המטריצה היא:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

והיא כבר אלכסונית. הע"ע הם $0,4$. לכן זו אליפסה.
לאחר השלמה לריבוע מקבלים:

$$\frac{(x')^2}{4}+\frac{(y')^2}{16}=1$$

(ה) המטריצה היא:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

הערכים העצמיים הם $\pm\frac{1}{2}$. לכן זו היפרבולה.
הו"ע המתאימים הם $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.
לאחר הצבה $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ כאשר P היא המטריצה המלכסנת (אורתוגונאלית)
והשלמה לריבוע, מקבלים:

$$\frac{(x')^2}{2}-\frac{(y')^2}{2}=1$$

(ו) המטריצה היא:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

הערכים העצמיים הם $-1,3$ ולכן זו היפרבולה.
הו"ע המתאימים הם $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.
לאחר הצבה $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ כאשר P היא המטריצה המלכסנת (אורתוגונאלית)
והשלמה לריבוע, מקבלים:

$$\frac{(x')^2}{6}-\frac{(y')^2}{2}=1$$